

Lista zadań dla studentów Energetyki 1. Całki 1

1. Wyznaczyć całki:

a) $\int 5x^7 dx$; b) $\int (3x^5 - 6x^3 - 5x + 1) dx$; c) $\int (2\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx$; d) $\int \frac{1-x+x^2}{x^4} dx$; e) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$;
f) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; g) $\int \frac{\sin 2x + 7 \sin^2 x}{\sin x} dx$; h) $\int \frac{(\sqrt[3]{t} - 1)^2}{t} dt$; i) $\int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{3}{\sqrt{1-u^2}} \right) du$; j) $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

2. Stosując metodę całkowania przez części wyznaczyć całki:

a) $\int x \cos x dx$; b) $\int x \operatorname{sh} x dx$; c) $\int x^2 \sin x dx$; d) $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$; e) $\int 2x \operatorname{arctg} x dx$; f) $\int x \ln x dx$.

3. Wykonując wskazane podstawienia obliczyć całki:

a) $\int x e^{-x^2} dx, t = -x^2$; b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, t = \sqrt{x}$; c) $\int \frac{\ln x}{x} dx, t = \ln x$; d) $\int \frac{1}{2+x^2} dx, x = \sqrt{2}t$; e) $\int x \sqrt{3+x^2} dx,$
 $t = 3+x^2$; f) $\int \frac{x}{(x^2-1)^4} dx, t = x^2-1$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, x = 2t$; h) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx, t = \sin x$.

4. Wykorzystując podstawienia liniowe obliczyć:

a) $\int (2x-1)^5 dx$; b) $\int \operatorname{ch} 5x dx$; c) $\int e^{(3x-7)} dx$; d) $\int \frac{dx}{4x+3}$; e) $\int \frac{dx}{1+(2x+1)^2}$; f) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

5. Stosując metodę całkowania przez części (i podstawienie) wyznaczyć całki:

a) $\int x e^{2x} dx$; b) $\int x \sin 5x dx$; c) $\int \arcsin x dx$; d) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

6. Wyznaczyć całki z ułamków prostych:

a) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$; b) $\int \frac{3dx}{x^2+2x+2}$; c) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10} dx$; d) $\int \frac{2x}{x^2-4x+5} dx$; e) $\int \frac{4x-6}{x^2+6x+13} dx$.

7. Wyznaczyć całki z wyrażeń wymiernych:

a) $\int \frac{x^2 dx}{x-2}$; b) $\int \frac{1}{x^2+3x-10} dx$; c) $\int \frac{x}{x^2-4} dx$; d) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$; e) $\int \frac{2+x}{x-x^2} dx$; f) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x} dx$.

8. Podstawienia $t = \sin x$ lub $t = \cos x$ oraz korzystając ze wzorów trygonometrycznych wyznaczyć całki:

a) $\int \sin^3 x dx$; b) $\int \cos^5 x dx$; c) $\int \cos^2 2x dx$; d) $\int \sin^4 x dx$; e) $\int 4 \cos^2 x \cos^2 x dx$; f) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$;
g) $\int \sin 5x \cos 7x dx$; h) $\int \cos 9x \cos x dx$.

9. Korzystając ze wzorów na całki z podstawowych wyrażeń niewymiernych wyznaczyć całki:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; b) $\int \sqrt{x^2-4x+8} dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$; d) $\int \sqrt{5-4x-x^2} dx$.

10. Korzystając ze wzoru Newtona-Leibniza obliczyć podane całki:

a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$; b) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$; c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}$; d) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4} + x^2 \right) dx$; e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

11. Wyznaczyć funkcje górnej granicy całkowania dla podanych funkcji na podanych przedziałach:

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, dla $x \in [0, \infty)$; b) $f(x) = \cos x$, dla $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$;

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \end{cases}$, dla $x \in [0, 2]$.

12. Wyznaczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

(a) osią Ox , prostymi $x = 1, x = 4$ i linią $y = \sqrt{x}$;

(b) osią Ox i linią $y = \sin x$ dla $x \in [0, \pi]$;

(c) osią Ox i linią $y = 4 - x^2$;

(d) osią Ox , prostymi $x = 1, x = 5$ i linią $xy = 5$;

(e) osią Ox , prostą $x = 3$ i wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x$;

(f) osią Ox i wykresem funkcji $f(x) = (x+2)x(x-2)$.