Ważne całki z niewymiernościami

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C;$

2. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+k} + k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|] + C;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

- Przypomnienie:

4. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}] + C.$

Przykłady: 1. 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x}};$

2. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+5}dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-2x^2}};$

4. $\int \sqrt{2x-x^2}dx.$

Całka oznaczona Riemanna

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (gdzie $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$) – podział przedziału $[a,b]$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – długość i-tego odcinka podziału; x_i^*- punkty pośrednie ($x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$); $\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_i : 1 \le i \le n\}$ – średnica podziału

Definicja 1.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

o ile granica istnieje i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ oraz wyboru punktów pośrednich x_i^*.

Dodatkowo przyjmuje się:

$$\int_a^a f(x)dx := 0; \qquad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Interpretacja geometryczna, funkcje całkowalne

$\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu obszaru zawartego pomiędzy osią Ox i wykresem funkcji $y = f(x)$ na $[a, b]$, z uwzględnieniem znaku w zależności od położenia obszaru względem osi Ox.Taki obszar nazywamy *trapezem krzywoliniowym.*

Definicja 2. Funkcję, dla której istnieje całka Riemanna na $[a, b]$ nazywamy funkcją *całkowalną* na $[a, b]$.

Uwaga 1. Nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna, np. funkcja Dirichleta nie jest całkowalna na żadnym przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma w tym przedziale skończoną ilość punktów nieciągłości I-go rodzaju, to jest całkowalna.*

Funkcja górnej granicy całkowania

Definicja 3. Niech f będzie całkowalna na $[a, b]$. Funkcję

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania.*

Twierdzenie 2 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)**.** *1. Funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła.*

2. Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$, to funkcja górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

jest różniczkowalna na $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$.

Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego, wzór Newtona-Leibnitza.

Twierdzenie 3 (Newtona-Leibnitza)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykłady: 2. 1. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x dx$; b) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; c) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$; d) $\int_{-1}^1 (x-x^3)dx$.

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, prostą $x = 3$ i wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$.

3. Wyznaczyć funkcje górnej granicy całkowania dla funkcji $f(x) = \text{sign}x$ i $g(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$.

Pole trapezu krzywoliniowego

Twierdzenie 4. *Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a,b]$, to pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego liniami $y = f(x)$, $y = g(x)$ i prostymi $x = a$, $x = b$ jest równe:*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

Przykłady: 3. Obliczyć pola trapezów krzywoliniowych ograniczonych liniami:

1. $y = x$, $xy = 1$, $x = 2$;
2. $y = \sin x$, $y = \cos x$ pomiędzy dwoma najbliższymi punktami przecięcia wykresów;
3. $y = x^2 - 2x$ i $y = 2x - 3$.