Def. 1. *Funkcją pierwotną* funkcji f na danym przedziale I nazywamy dowolną funkcję F, która dla $x \in I$ spełnia warunek

$$F'(x) = f(x).$$

Przykład: 1. Funkcja sgn$x$ nie ma funkcji pierwotnej na żadnym przedziale zawierającym 0. Funkcje arcsin i $-$arccos są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Zachodzi jednak: $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$.

Tw. 1. *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas:*

1. *$G(x) = F(x) + C$ jest funkcją pierwotną funkcji f na I dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$,*
2. *Każdą funkcję pierwotną można zapisać w postaci $F(x) + C$.*

Tw. 2. *Każda funkcja ciągła na przedziale I ma funkcję pierwotną na I.*

Uwaga 1. Nie każda funkcja pierwotna danej funkcji elementarnej jest elementarna! Przykładowo: e^{x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^3}$, $\cos x^2$.

Def. 2. *Całką nieoznaczoną* funkcji f nazywamy zbiór funkcji:

$$\int f(x)dx := \{F(x) + C : \ C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną. Piszemy krótko: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Wn. 1.

1. *$[\int f(x)dx]' = f(x)$,*
2. *$\int f'(x)dx = f(x) + C$.*

Lista całek funkcji elementarnych

1. $\int 0dx = C$,
2. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ dla $r \neq -1$,
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ dla $0 < a \neq 1$, ($\int e^x dx = e^x + C$),
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\quad \int \cos x dx = \sin x + C$,
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}x + C$, $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$,
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$,

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$,

9. $\int \mathrm{sh}x = \mathrm{ch}x + C$, $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C$,

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$.

Tw. 3. *Jeżeli f i g mają funkcje pierwotne, to*

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

Przykłady: 1. Wyznaczyć całki:

1. $\displaystyle\int (4x^3 + 2x^2 - \sqrt[3]{x} + 3x^{-1})dx$,

2. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$,

3. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x dx$,

4. $\displaystyle\int 3^x 5^{-2x} dx$.

Całkowanie przez części

Tw. 4 (O całkowaniu przez części)**.** *Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne, to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykłady: 2. 1. $\int x \sin x dx$,

2. $\int x^2 e^x dx$,

3. $\int \ln x dx$,

4. $\int e^x \sin x dx$,

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Całkowanie przez podstawienie

Tw. 5 (O całkowaniu przez podstawienie)**.**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{gdzie } u = g(x).$$

(O f i g' zakładamy, że są ciągłe.)

Wn. 2. *Jeżeli* $\int f(x)dx = F(x) + C$ *i* $a \neq 0$, *to*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Wn. 3.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Przykłady: 3. 1. $\int 3x^2\sqrt{1+x^3}dx$,

2. $\int 2x\cos(x^2)dx$,
3. $\int \sin 4x dx$,
4. $\int (2x-5)^7 dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$,
6. $\displaystyle\int \frac{2xdx}{a^2+x^2}$,
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$,
8. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}] + C.$

Całkowanie niektórych wyrażeń trygonometrycznych
Przydatne wzory trygonometryczne

1. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,
2. $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$,
3. $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$,
4. $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$.

Przykłady: 4.

1. $\int \cos x \sin^5 x dx$,
2. $\int \cos^3 x dx$,
3. $\int \sin^5 x dx$,
4. $\int \sin^2 x dx$,
5. $\int \cos^4 x dx$,
6. $\int \sin 2x \cos 4x dx$,
7. $\int \sin x \sin 3x dx$.

Ułamki proste

$$\mathrm{I}: \ \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \mathrm{II}: \ \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^n} \quad (\Delta < 0)$$

Tw. 6 (O rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)**.** *Każda funkcja wymierna właściwa rozkłada się jednoznacznie na sumę ułamków prostych.Jeżeli w mianowniku występuje czynnik* $(x-a)^n$*, to w rozkładzie należy uwzględnić:*

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Jeżeli w mianowniku występuje czynnik $(px^2+qx+r)^n$*, to w rozkładzie należy uwzględnić:*

$$\frac{B_1x+C_1}{px^2+qx+r} + \frac{B_2x+C_2}{(px^2+qx+r)^2} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(px^2+qx+r)^n}.$$

Przykłady: 5. 1. $\int \frac{3}{x-5} dx$,

2. $\int \frac{2}{(x+3)^4} dx$,
3. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$
4. $\int \frac{4x-1}{x^2+2x+5} dx$
5. $\int \frac{3x+7}{x^2+4x+3} dx$
6. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} dx$