Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego, to:

równanie

$$y" = F(x, y, y')$$

lub ogólniej

$$F(x, y, y', y") = 0,$$

w którym występuje zmienna niezależna x jej funkcja $y(x)$ i pochodne tej funkcji $y', y"$. Całką ogólną równania rzędu drugiego jest dwuparametrowa rodzina rozwiązań

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

Zagadnienie początkowe ma postać:

$$y" = F(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu

Równanie postaci

$$y" = F(x, y')$$

sprowadzamy do równania rzędu pierwszego

$$u' = F(x, u)$$

za pomocą podstawienia

$$u(x) = y'(x).$$

Przykład: 1.

1. Znaleźć całkę ogólną równania $y"(1 + x^2) = 1$.
2. Rozwiązać zagadnienie początkowe: $x^3y" + x^2y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$y'' + py' + qy = h(x), \tag{1}$$

gdzie $p, q \in \mathbb{R}$. Dla $h(x) \equiv 0$ czyli wyrazu wolnego tożsamościowo równego 0 otrzymujemy równanie:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2}$$

które nazywamy *równaniem jednorodnym.* Jeżeli funkcje $y_1(x), y_2(x)$ spełniają równanie (2), to ich dowolna kombinacja liniowa

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

również spełnia (2).

Definicja 1. Parę funkcji $y_1(x), y_2(x)$ określonych na przedziale (a,b) nazywamy *układem fundamentalnym* równania (2), gdy spełniają to równanie i dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi:

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Przykład: 2. Funkcje $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$ tworzą na $\mathbb{R}$ układ fundamentalny równania $y'' + y' - 2y = 0$, a funkcje $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ tworzą na $\mathbb{R}$ układ fundamentalny równania $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcje $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny równania jednorodnego (2), to każde rozwiązanie tego równania jest postaci*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

gdzie stałe C_1, C_2 są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 2. *Równaniem charakterystycznym* jednorodnego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach (2) nazywamy równanie

$$r^2 + pr + q = 0$$

zmiennej r.

Twierdzenie 2 (Układy fundamentalne i rozwiązania jednorodnych równań liniowych)**.** *Układ fundamentalny równania (2) tworzą funkcje:*

1. $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, *gdy r_1, r_2 są różnymi rzeczywistymi pierwiastkami równania charakterystycznego,*

2. $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$, *gdy r jest rzeczywistym pierwiastkiem podwójnym równania charakterystycznego,*

3. $y_1 = Re(e^{zx}) = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = Im(e^{zx}) = e^{ax}\sin bx$, *gdy $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ są zespolonymi pierwiastkami równania charakterystycznego.*

Przykład: 3. Wyznaczyć układy fundamentalne i podać rozwiązania ogólne równań:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$;

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$;

3. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Znaleźć rozwiązania podanych zagadnień początkowych:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0'$ $\;y(0) = 7, \quad y'(0) = 16$;

2. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

3. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 3$.

Przykład:

Obwód elektryczny zawiera połączone szeregowo kondensator o pojemności C, opornik o oporze R i cewkę o indukcyjności L. Wyznaczyć funkcję natężenia $i(t)$ w zależności od czasu. $u_R + u_L + u_C = 0$,$u_R = Ri$,$u_L = L\frac{di}{dt}$,$u_C = \frac{Q}{C}$. Dostajemy równanie:

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{Q}{C} = 0$$

i po zróżniczkowaniu

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C};\ \Delta = R^2 - \frac{4L}{C}.$$

Postać rozwiązania równania liniowego niejednorodnego

Twierdzenie 3. *Jeśli $\varphi(x)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (1) i $(y_1(x), y_2(x))$ jest układem fundamentalnym odpowiadającego mu równania jednorodnego (2), to każde rozwiązanie równania jednorodnego jest postaci*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \varphi(x),$$

gdzie stałe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ są wyznaczone jednoznacznie.

Twierdzenie 4 (O dodawaniu rozwiązań)**.** *Jeżeli funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ są odpowiednio rozwiązaniami równań:*

$$y'' + py' + qy = h_1(x), \qquad y'' + py' + qy = h_2(x),$$

to funkcja $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ jest rozwiązaniem równania

$$y'' + py' + qy = h_1(x) + h_2(x).$$

Metody przewidywania

Jeśli prawa strona równania liniowego niejednorodnego (1) jest postaci

$$h(x) = W(x)e^{ax},$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem, to rozwiązanie przewidujemy w postaci:

1. $\varphi(x) = V(x)e^{ax}$, gdy a nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego,

2. $\varphi(x) = xV(x)e^{ax}$, gdy a jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego,

3. $\varphi(x) = x^2V(x)e^{ax}$, gdy a jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego,

gdzie $V(x)$ jest wielomianem tego samego stopnia co $W(x)$. Jeśli prawa strona równania liniowego niejednorodnego (1) jest postaci

$$h(x) = m\cos bx + n\sin bx,$$

to rozwiązanie przewidujemy w postaci:

1. $\varphi(x) = M\cos bx + N\sin bx$, gdy bi nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego,
2. $\varphi(x) = x(M\cos bx + N\sin bx)$, gdy bi jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego.

Przykład: 4. Metodą przewidywania wyznaczyć rozwiązania ogólne równań:

1. $y'' - y' = -2x + 2$,
2. $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$,
3. $y'' + y' - 2y = \cos x + 2\sin x$,
4. $y'' + 4y = \cos 2x$.
5. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Definicja 3. *Układem równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach* nazywamy układ postaci:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + h_1(t) \\ y_2' & = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + h_2(t) \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + h_n(t) \end{array}\right. ,$$

gdzie $y_1, y_2, ..., y_n$ są niewiadomymi funkcjami zmiennej t. Jeśli funkcje wszystkie funkcje $h_1(t), h_2(t), ..., h_n(t)$ są tożsamościowo równe 0, to układ nazywamy jednorodnym.

Uwaga 1. Analogicznie określamy *układ równań różniczkowych liniowych* biorąc zamiast stałych współczynników a_{ij} funkcje $a_{ij}(t)$ zmiennej t.

Postać wektorowa układu równań liniowych z warunkiem początkowym

$$\vec{y'} = A\vec{y} + \vec{h}(t); \quad \vec{y}(t) = \vec{y}^0$$

gdzie

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \vec{y'} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \ \vec{h}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \ \vec{y}^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}.$$

Metoda eliminacji sprowadzania układu dwóch równań liniowych jednorodnych do równania liniowego rzędu 2

Jeżeli $b \neq 0$, to układ

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases}$$

można sprowadzić do równania:

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

różniczkując pierwsze z równań i rugując y. Mając funkcję $x(t)$, wyznaczamy $y(t) = \frac{1}{b}(x'(t) - ax(t))$.

Przykład: 5. Rozwiązać układ równań różniczkowych liniowych $\vec{y'} = A\vec{y}$, przy danych miacierzach A i warunkach początkowych $\vec{y}(0) = \vec{y_0}$: a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

Definicja 4. Parę

$$\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}, \vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

wektorów funkcyjnych określonych na przedziale (a, b) nazywamy *układem fundamentalnym* układu równań $\vec{y'} = A\vec{y}$, gdy dla każdego $t \in (a, b)$ zachodzi:

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli wektory $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)$ tworzą układ fundamentalny układu równań $\vec{y'} = A\vec{y}$, to każde rozwiązanie tego równania jest postaci*

$$\vec{y}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + C_2\vec{y}_2(t).$$