Przykład:

Obwód elektryczny zawiera kondensator o pojemności C z ładunkiem $Q(t)$ oraz opornik o oporze R. W chwili $t = 0$, gdy obwód zostaje zamknięty, wartość ładunku w kondensatorze wynosi Q_0 i stąd natężenie prądu w obwodzie jest równe $i_0 = \dfrac{Q_0}{RC}$. Wyznaczyć funkcję natężenia $i(t)$ w zależności od czasu.

- Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa: $Ri(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$.
- Z definicji natężenia: $i(t) = -Q'(t) = -\dfrac{dQ}{dt}$.
- Stąd dostajemy równanie: $i'(t) = -\frac{i(t)}{RC}$.
- Spełnia je każda funkcja $i(t) = Ae^{-t/RC}$, gdzie A jest dowolną stałą.
- Po uwględnieniu ładunku początkowego dostajemy $i(t) = \frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}$.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego, to:

równanie

$$y' = F(x, y)$$

lub ogólniej

$$F(x, y, y') = 0,$$

w którym występuje zmienna (x) jej funkcja $(y(x))$ i pochodna tej funkcji $y'(x)$. Zmienną często oznacza się t (zwłaszcza, gdy jest nią czas), niekiedy pochodną oznacza się $\dot{y}(t)$ zamiast $y'(t)$. *Rozwiązaniem* (*całką szczególną*) równania nazywamy każdą funkcję, która spełnia równanie dla wszystkich wartości zmiennej z pewnego przedziału. *Całką ogólną* nazywamy (jednoparametrową) rodzinę rozwiązań $y = y(x, C)$. *Krzywa całkowa* to wykres dowolnego rozwiązania. *Warunki początkowe* $y_0 = y(x_0)$ pozwalają wybrać całkę szczególną z rozwiązania ogólnego. Równanie wraz z warunkiem początkowym nazywa się *zagadnieniem początkowym.*

Równania o zmiennych rozdzielonych:

$$p(y)y' = q(x) \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli $p(y)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu (c, d) punktu $y = y_0$, przy czym $p(y_0) \neq 0$, a $q(x)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu (a, b) punktu $x = x_0$, to przez każdy punkt prostokąta $(a, b) \times (c, d)$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1) określona równaniem $y = f(x)$, czyli zagadnienie początkowe*

$$p(y)y' = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest dane w postaci uwikłanej równaniem

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx.$$

Przykłady: 1. Znaleźć całki ogólne danych równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych oraz całki szczególne spełniające dane warunki początkowe:

1. $y' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y(1) = \pi;$
2. $y' = ay$ dla dowolnej stałej $a, \quad y(0) = 5;$
3. $y'(t) = -\dfrac{y(t)}{RC}, \quad y(0) = \dfrac{Q_0}{RC};$
4. $y' = \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 2$
5. $y' = \dfrac{-x}{y}, \quad y(3) = 4$
6. $t^2 \dfrac{dy}{dt} = y, \quad y(1) = e;$
7. $y' = y\mathrm{ctg}t, \quad y(\frac{\pi}{6}) = 1;$
8. $y' = e^{t+y} \quad y(0) = 0;$

Równania różniczkowe liniowe jednorodne (RRLJ):

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, które zawsze spełnia funkcja $y(x) = 0$. Dla $y \neq 0$ można je zapisać:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -p(x).$$

Całka ogólna równania (2) ma postać:

$$y = Ce^{-P(x)}$$

gdzie $P(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $p(x)$.

Przykłady: 2. a) $y' - \dfrac{2x-1}{x^2}y = 0;$ b) $xy' + y = 0$ przy warunku $y(2) = 1$.

Równania różniczkowe liniowe niejednorodne (RRLN):

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

Metoda uzmienniania stałej:

1. Znajdujemy całkę ogólną $y = Ce^{-P(x)}$ (RRLJ) powstałego z (RRLN) po zastąpieniu funkcji $q(x)$ stałą 0.

2. Całka ogólna (RRLN) ma postać

$$y = C(x)e^{-P(x)} \tag{4}$$

(zamiast stałej C bierzemy funkcję $C(x)$).

3. Równanie na funkcję $C(x)$ otrzymujemy po wstawieniu do (3) funkcji (4) i jej pochodnej.

4. Z kształtu równania wynika, że $C(x)$ ulega skróceniu i w równaniu pozostaje tylko $C'(x)$!

5. Ostatecznie otrzymujemy całkę ogólną postaci: $y = (C(x) + C_1)e^{-P(x)}$.

Przykład: 1. Rozwiązać metodą uzmienniania stałej

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
2. $xy' - 2y = x^3 \cos x$;

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcje $p(x)$, $q(x)$ są ciągłe w otoczeniu (a, b) punktu x_0, to zagadnienie początkowe*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, czyli przez każdy punkt pasa $(a, b) \times R$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania.

Przykład: 2. Rozwiązać zagadnienie początkowe: $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}$.

Równanie różniczkowe zupełne

Równaniem różniczkowym zupełnym nazywamy równanie postaci

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

gdzie funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w pewnym obszarze jednospójnym D oraz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z ostaniego warunku wynika, że wyrażenie $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji dwóch zmiennych $F(x, y)$ i rozwiązanie przyjmuje postać:

$$F(x, y) = C.$$

(Obszar jednospójny, to obszar „bez dziur" - jeśli zawiera brzeg jakiegoś zbioru ograniczonego, to zawiera cały ten zbiór.)

Metoda wyznaczenia funkcji $F(x,y)$

1. Wyznaczamy $\int P(x,y)dx$, która jest dana z dokładnością do pewnej funkcji $\varphi(y)$,
2. funkcję $\varphi(y)$ wyznaczamy z warunku $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

Uwaga 1. Można również zacząć od $\int Q(x,y)dy$, która jest dana z dokładnością do pewnej funkcji $\psi(x)$ i wyznaczyć $\psi(x)$ z warunku $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$.

Przykłady: 3. Rozwiązać równania:

1. $(3x^2y^2 + 6xy)dx + (2x^3y + 3x^2 + 3y^2)dy = 0$;
2. $(3x^2 + y^2)dx + 2y(x-1)dy = 0$;
3. $2\cos(2x+y) - \sin(x+2y) + (\cos(2x+y) - 2\sin(x+2y))\dfrac{dy}{dx} = 0$.