Def. 1. Funkcje, których dziedzinami są podzbiory płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ lub przestrzeni $\mathbb{R}^3$ a przeciwdziedziną $\mathbb{R}$ nazywamy odpowiednio funkcjami dwóch lub trzech zmiennych. Wartości tych funkcji oznaczamy odpowiednio $f(x, y)$ i $f(x, y, z)$.

Przykład: 1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Def. 2. Wykresem funkcji f dwóch zmiennych nazywamy zbiór:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = f(x, y).$$

Przykład: 2.

1. Płaszczyzna $z = Ax + By + C$.
2. Paraboloida obrotowa $z = x^2 + y^2$.
3. Paraboloida hiperboliczna $z = x^2 - y^2$.
4. Walec paraboliczny $z = y^2$.

Def. 3 (Granica właściwa ciągu punktów)**.** Mówimy, że ciąg (P_n) punktów płaszczyzny (przestrzeni) jest zbieżny do granicy P, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |P_nP| < \varepsilon.$$

Def. 4 (Granica właściwa funkcji według Heinego)**.** Mówimy, że funkcja dwóch zmiennych f określona w sąsiedztwie punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ zbiega do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do (x_0, y_0) ciągu $((x_n, y_n))$ punktów sąsiedztwa punktu (x_0, y_0), ciąg wartości $(f(x_n, y_n))$ zbiega do g.

Def. 5. Funkcja f jest ciągła w (x_0, y_0), gdy $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Def. 6. Pochodne cząstkowe funkcji f dwóch zmiennych w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

Jeżeli f ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi funkcji funkcji f w zbiorze D. Stosujemy również oznaczenia f_x, f_y.

Przykład: 3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe danych funkcji dwóch i trzech zmiennych: a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, b) $f(x, y) = y^2$, c) $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, d) $f(x, y) = x^y$, e) $f(x, y, z) = y - \sqrt{x^2 + z^3}$.

Def. 7. Jeżeli f ma pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu (x_0, y_0), to pochodne drugiego rzędu w tym punkcie określamy wzorami:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x}))(x_0, y_0)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}))(x_0, y_0)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x}))(x_0, y_0)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y}))(x_0, y_0)$.

Analogicznie jak dla pochodnych pierwszego rzędu określamy funkcje pochodnych drugiego rzędu w zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^2$. Stosujemy również oznaczenia f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} i f_{yy}.

Przykład: 4. Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

1. $f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^4$,
2. $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$,
3. $f(x, y) = \cos(x + 2y)$

Przykład: 5. Wyznaczyć pochodne drugiego rzędu f_{xz} i f_{zx} oraz pochodną trzeciego rzędu f_{yxz} funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$.

Tw. 1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)**.** *Jeżeli pochodne cząstkowe* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *i* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *są ciągłe w punkcie* (x_0, y_0)*, to są równe.*

Def. 8. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), gdy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Def. 9. *Różniczką* w punkcie (x_0, y_0) funkcji f, posiadającej pochodne cząstkowe w tym punkcie, nazywamy następującą funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych Δx, Δy:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Wn. 1. *Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), to*

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

przy czym $\Delta f - df$ zbiega do 0 szybciej niż $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Przykład: 6. Napisać różniczki podanych funkcji we wskazanych punktach:

1. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ w $(x_0,y_0) = (-2,2)$,
2. $f(x,y) = x^y$, w $(x_0,y_0) = (1,3)$.
3. Zastosować do wyznaczenia wartości przybliżonych wyrażeń: $\sqrt[3]{(-1,98)^2+(2,03)^2}$ i $(1,04)^{3,01}$.

Def. 10. Pochodną funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wektora jednostkowego (czyli wersora) $\overrightarrow{v} = [v_1,v_2]$ określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}} := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Def. 11. *Gradientem* funkcji f w punkcie (x_0,y_0) nazywamy wektor:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \mathbf{grad} f(x_0,y_0) := \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right].$$

Tw. 2. *Jeśli f ma w (x_0,y_0) ciągłe pochodne cząstkowe, to* $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}} = \nabla f(x_0,y_0) \circ \overrightarrow{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2$.

Wn.1 Pochodne cząstkowe są pochodnymi w kierunku wersorów $[1,0]$ i $[0,1]$.

Wn.2 Gradient jest kierunkiem najszybszej zmiany wartości funkcji i jest prostopadły do poziomic wykresu funkcji.

Przykład: 7. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y) = x^2+y^2$ w dowolnym punkcie oraz poziomicę odpowiadającą tej wartości funkcji. Dla punktu $(3,4)$ wyznaczyć dodatkowo pochodne w kierunku gradientu oraz wersorów $[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Tw. 3 (Warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych)**.** *Niech f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2 w otoczeniu punktu (x_0,y_0) oraz niech*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0,$

2. $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} > 0.$

Wówczas f ma w (x_0,y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ *a maksimum, gdy* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$. *Jeśli wyznacznik z* $(2) < 0$, *to f nie ma ekstremum w (x_0,y_0).*

Przykład: 8. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3+3xy^2-51x-24y$.

Wyznaczanie wartości największej i najmniejszej funkcji w obszarze domkniętym

1. Wyznaczamy ekstrema lokalne wewnątrz obszaru.
2. Wyznaczamy ekstrema warunkowe na brzegu obszaru składając funkcję dwóch zmiennych z funkcją określającą brzeg.

   W tym celu brzeg należy podzielić na części, które można opisać równaniem $y = p(x)$ lub $x = q(y)$.
3. Porównujemy wartości w punktach ekstremalnych i wybieramy największą i najmniejszą z nich.

Przykład: 9. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y$ w kwadracie $[0, 3] \times [0, 3]$.

Całki podwójne

$F(x, y)$ – funkcja ograniczona dwóch zmiennych określona na prostokącie $R = [a, b] \times [c, d]$; $\mathcal{P}$ – podział prostokąta R na n prostokątów R_i o rozłącznych wnętrzach; Δx_i, Δy_i długości boków i-tego prostokąta podziału; $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ – punkty pośrednie; $\delta(\mathcal{P}) = \max\{\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} : \ 1 \le i \le n\}$ – średnica podziału

Def. 12. Całką podwójną z funkcji F po prostokącie R nazywamy:

$$\iint_R F(x, y)dxdy := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_i,$$

o ile granica istnieje i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ oraz wyboru punktów pośrednich (x_i^*, y_i^*).

Całka podwójna po dowolnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint_D F(x, y)dxdy := \iint_R F^*(x, y)dxdy$$

gdzie R jest dowolnym prostokątem zawierającym D i

$$F^*(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{dla } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

o ile całka po prawej stronie istnieje.

- Podstawowa interpretacja geometryczna:

  objętość bryły zawartej pomiędzy obszarem D płaszczyzny Oxy i powierzchnią wykresu funkcji $F(x, y)$ (z uwzględnieniem znaku).

Obszary normalne

Def. 13. Obszar D_1 (D_2) nazywamy odpowiednio *normalnym*:

(a) względem Ox gdy istnieją funkcje ciągłe f, g, takie że $f(x) < g(x)$ dla $x \in [a, b]$ i
$$D_1 = \{(x, y): \ x \in [a, b] \text{ i } f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

(b) względem Oy gdy istnieją funkcje ciągłe p, q, takie że $p(y) < q(y)$ dla $y \in [c, d]$ i
$$D_2 = \{(x, y): \ y \in [c, d] \text{ i } p(y) \leq x \leq q(y)\}.$$

Całki iterowane

Tw. 4. *Jeżeli F jest całkowalna po obszarze normalnym D_1 (D_2), to*

$$\iint_{D_1} F(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy := \int_a^b (\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)dy)dx,$$

$$\iint_{D_2} F(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} F(x,y)dx := \int_c^d (\int_{p(y)}^{q(y)} F(x,y)dx)dy.$$

W szczególności jeśli $D = [a, b] \times [c, d]$ (jest prostokątem), to:

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b F(x,y)dx.$$

Przykłady: 1. 1. Obliczyć:

$$\iint_D \cos(x+y)dxdy$$

gdzie $D = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$.

2. Obliczyć:
$$\iint_D 2xy^2 dxdy$$
gdzie $D = \{(x, y): \ 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$.

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ i paraboloidą $z = 1 - x^2 - y^2$.

Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Def. 14. Przekształceniem obszaru płaskiego Δ na płaszczyźnie Ouv w obszar płaski D na płaszczyźnie Oxy nazywamy funkcję $\mathcal{T}:\Delta\to D$ określoną wzorem:

$$(x,y)=\mathcal{T}(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v)).$$

Przekształcenie $\mathcal{T}$ nazywamy ciągłym, gdy funkcje φ,ψ są ciągłe.

Przykład: 10.

1. Narysować obraz D prostokąta $\Delta=[0,1]\times[2,4]$ w przekształceniu $\mathcal{T}:\ x=u+v;\ y=u-v$.
2. D jest obszarem ograniczonym dwiema hiperbolami $xy=1$, $xy=2$ oraz dwiema prostymi $y=x$ i $y=2x$. Znaleźć pewien prostokąt Δ i przekształcenie $\mathcal{T}:\Delta\to D$.

Def. 15. Jakobianem przekształcenia $\mathcal{T}$ w punkcie (u,v) nazywamy:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{T}}(u,v)=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}:=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}.$$

Uwaga 1. Wartość bezwzględna jakobianu w punkcie (u,v) jest równa granicy stosunku pól obrazu $\mathcal{T}(O((u,v),r))$ otoczenia punktu (u,v) i tego otoczenia $O((u,v),r)$. Zatem jeśli $\mathcal{T}:\Delta\to D$ jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym, to pole obszaru D

$$P_D=\iint_D dxdy=\iint_\Delta \mathcal{J}_{\mathcal{T}}(u,v)dudv.$$

Przykład: 11. Wyznaczyć jakobiany przekształceń z poprzedniego przykładu i pola obszarów D.

Tw. 5 (O zamianie zmiennych w całce podwójnej)**.** *Jeżeli*

1. *przekształcenie $\mathcal{T}$ wzajemnie jednoznacznie wnętrze obszaru Δ na wnętrze obszaru D,*
2. *funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w pewnym zbiorze otwartym zawierającym Δ,*
3. *funkcja F jet ciągła na obszarze D,*
4. *jakobian $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ jest różny od zera wewnątrz obszaru Δ, to*

$$\iint_D F(x,y)dxdy=\iint_\Delta F(\varphi(u,v),\psi(u,v))|\mathcal{J}_{\mathcal{T}}(u,v)|dudv.$$

Przykład: 12. Wyznaczyć $\iint_D xydxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $xy=1$, $xy=2$, $y=x^2$, $y=3x^2$.

Podstawienie biegunowe

Def. 16.
- Parę (r, φ) gdzie r jest modułem i φ argumentem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu o współrzędnych kartezjańskich (x, y).
- Przekształcenie określone wzorem:

$$(r, \varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

nazywamy *przekształceniem biegunowym.*

Wn. 2. *Jeżeli przekształcenie biegunowe przeprowadza wzajemnie jednoznacznie obszar regularny Δ na obszar D, to*

$$\iint_D F(x, y)dxdy = \iint_\Delta rF(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi.$$

Przykłady:

1.
$$\iint_D 3(x + y)dxdy$$
gdzie $D = \{(x, y):\ x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2.
$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$
gdzie $D = \{(x, y):\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. Korzystając z całki podwójnej i podstawienia biegunowego wykazać, że:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}.$$