Def. 1. *Szeregiem* nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...,$$

liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem szeregu, a sumę

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

n-tą sumą częściową. Mówimy, że szereg jest

- *zbieżny* gdy ciąg (S_n) jego sum częściowych jest zbieżny do granicy właściwej,
- *rozbieżny do* $\pm\infty$ gdy $\lim S_n = \pm\infty$,
- *rozbieżny* gdy (S_n) nie ma granicy (ani właściwej ani niewłaściwej).

Jeśli szereg jet zbieżny, to granicę ciągu sum częściowych nazywamy jego sumą i oznaczamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (tak samo jak szereg!).

Przykład: 1 (Suma szeregu geometrycznego). Jeśli $|q| < 1$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Przykład: 2. Wyznaczyć sumy częściowe danych szeregów i zbadać ich zbieżność:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{5^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$.

Tw. 1. *Jeżeli szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, to*

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Uwaga 1. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim a_n = 0$.

Tw. 2 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)**.** *Niech funkcja f_n będzie nieujemna i nierosnąca na przedziale $[n_0, \infty)$. Wówczas szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ i całka $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $+\infty$.*

Wn. 1 (Kryterium zbieżności szeregów harmonicznych rzędu p). *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *jest zbieżny dla* $p > 1$ *a rozbieżny dla* $p \leq 1$.

Przykład: 3. Zbadać zbieżność szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{3}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$.

Tw. 3 (Kryterium porównawcze zbieżności szeregów). *Niech* $0 \leq a_n \leq b_n$ *dla* $n \geq n_0$. *Wówczas:*

1. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny do* $+\infty$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny do* $+\infty$.

Przykład: 4. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}$,

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Tw. 4 (Kryterium Leibniza). *Jeżeli* $\lim a_n = 0$ *i ciąg* a_n *jest nierosnący od pewnego* $n_0 \in \mathbb{N}$, *to szereg naprzemienny* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *jest zbieżny.*

Def. 2. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny *bezwzględnie*, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Szereg, który jest zbieżny ale nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy *zbieżnym warunkowo.*

Tw. 5. *Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.*

Przykład: 5. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.

Def. 3. Mówimy, ciąg funkcji f_n funkcji określonych na zbiorze X zbiega *punktowo* na zbiorze $Y \subset X$ do funkcji f gdy

$$\bigwedge_{x \in Y} \lim f_n(x) = f(x)$$

natomiast zbiega jednostajnie, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} \bigwedge_{x \in Y} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Maksymalny zbiór $Y \subset X$, na którym ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny punktowo nazywamy *obszarem zbieżności* tego ciągu. (Zbieżność punktową oznacza się $f_n \to f$ a jednostajną $f_n \rightrightarrows f$.)

Przykład: 6. Wyznaczyć obszar zbieżności ciągu funkcji $f_n(x) = x^n$. Sprawdzić czy ciąg ten jest zbieżny jednostajnie w swoim obszarze zbieżności.

Def. 4. *Szeregiem funkcyjnym* na zbiorze X nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

gdzie (f_n) jest ciągiem funkcyjnym na X. Funkcję f_n nazywamy n-tym wyrazem szeregu, a sumę $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ n-tą sumą częściową. Mówimy, że szereg jest zbieżny (jednostajnie) na zbiorze $Y \subset X$, gdy zbieżny (jednostajnie) jest jego ciąg sum częściowych. Zbieżność bezwzględną szeregów funkcyjnych definiujemy analogicznie jak dla szeregów liczbowych.

Przykład: 7. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu funkcyjnego: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Tw. 6 (Kryterium Weierstrassa jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego)**.** *Jeżeli* $|f_n(x)| \leq a_n$ *dla* $n > n_0$ *i* $x \in X$ *oraz szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg funkcyjny* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na zbiorze* X.

Przykład: 8. Uzasadnić zbieżność jednostajną i bezwzględną danych szeregów na danych zbiorach: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ na $\mathbb{R}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ na $[1, \infty)$.

Def. 5. Szeregiem potęgowym o środku x_0 i współczynnikach c_n nazywamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Def. 6. Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ nazywamy liczbę

$$R := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

W przypadku, gdy $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ przyjmujemy $R = 0$ a w przypadku $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ przyjmujemy $R = \infty$.

Promień zbieżności oblicza się zwykle ze wzorów $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}}$ lub $R = \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ o ile te granice istnieją.

Tw. 7 (Cauchy'ego-Hadamarda)**.** *Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ $(0 < R < \infty)$. Wówczas szereg ten jest*

1. *zbieżny bezwzględnie w przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$;*
2. *zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$, gdzie $0 < r < R$;*
3. *rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + r, +\infty)$.*

Uwaga 2. Twierdzenie nie rozstrzyga zbieżności szeregu w punktach $x_0 - R$ i $x_0 + R$. Przedział zbieżności szeregu może być zarówno otwarty, domknięty jak i domknięto-otwarty. Dla $R = 0$ szereg jest zbieżny tylko w punkcie x_0 a dla $R = \infty$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Przykład: 9. Wyznaczyć przedziały zbieżności danych szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^3}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-4)^n}{3^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

Tw. 8 (O rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)**.** *Jeżeli w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu x_0 funkcja f ma pochodne dowolnego rzędu i są one wspólnie ograniczone, to dla $x \in \mathcal{O}$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Przykład: 10. Funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & dla \quad x \neq 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \end{cases}$ ma w $x_0 = 0$ pochodną dowolnego rzędu równą 0 i oczywiście nie jest równa sumie swego szeregu Maclaurina w żadnym otoczeniu tego punktu.

Szeregi Maclaurina niektórych funkcji elementarnych

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ dla $x \in (-1, 1)$

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$ dla $x \in \mathbb{R}$

Przykład: 11. Napisać szeregi Maclaurina funkcji:

1. $\frac{1}{1+x}$,
2. $\frac{1}{1+x^2}$,
3. e^{2x},
4. $\mathrm{ch} x^2$.

Szeregi Fouriera

Def. 7. *Szeregiem Fouriera* funkcji f całkowalnej na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywamy szereg trygonometryczny:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

oraz

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, ...$$

Uwaga 3. Dla funkcji parzystej znikają współczynniki b_n a dla nieparzystej znikają współczynniki a_n jej szeregu Fouriera.

Przykład: 12. Wyznaczyć szeregi Fouriera funkcji $\mathrm{sgn} x$ oraz $|x|$ na przedziale $(-\pi, \pi)$.

1. $\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$

2. $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$

Przykład: 13. Korzystając z wyprowadzonych wzorów obliczyć sumy szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...$

Tw. 9 (Kryterium Dirichleta). *Jeżeli funkcja f na przedziale $[-\pi, \pi]$ spełnia warunki:*

1. *przedział $[-\pi, \pi]$ da się podzielić na skończoną ilość takich przedziałów, że f jest monotoniczna w każdym z nich,*

2. *w każdym punkcie przedziału $(-\pi, \pi)$ wartość funkcji jest równa średniej arytmetycznej granic jednostronnych w tym punkcie,*

3. $f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to-\pi^+} f(x) + \lim_{x\to\pi^-} f(x)),$

to f jest sumą swego szeregu Fouriera.