

# Wzory do drugiego kolokwium z matematyki

## Ważne granice wyrażeń nieoznaczonych

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \text{ dla dowolnego } r \in \mathbb{R}.$$

## Pochodne funkcji elementarnych

$$1. c' = 0 \text{ (pochodna funkcji stałej jest równa 0),}$$

$$2. (x^r)' = rx^{r-1} \text{ dla dowolnego } r \in \mathbb{R},$$

$$3. (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$4. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x,$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$7. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$8. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$9. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$10. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$11. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$12. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

## Reguły różniczkowania

1. Pochodna sumy i różnicy

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

2. Wyciąganie stałej przed pochodną

$$(cf)'(x) = cf'(x), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

3. Pochodna iloczynu

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. Pochodna ilorazu

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

o ile  $g(x) \neq 0$ .

5. Pochodna funkcji złożonej

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

6. Pochodna funkcji odwrotnej

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

## Wyrażenia wykładniczo-potęgowe

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

## Wzór Taylora i szeregi Maclaurina dla funkcji $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^c$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cos c$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos c.$$