Lista zadań dla studentów Energetyki. 6

1. Napisać równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = x^2,\ (1,1)$; b) $f(x) = \arcsin x,\ (\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$; c) $f(x) = \ln(x^2+e),\ (0, f(0))$;

2. d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2},\ (1, f(1))$; e) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x},\ (-1, f(-1))$.

3. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \sqrt[5]{x}, x_0 = 0$; b) $g(x) = \sqrt[5]{x^2}, x_0 = 0$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\sqrt[3]{7,9999}$, b) $e^{0,04}$, c) $\ln\frac{2000}{2001}$, d) $\arccos 0,499$, e) $\frac{1}{\sqrt{3,98}}$.

5. Wyznaczyć pochodne 4-tego rzędu podanych funkcji:
   a) $f(x) = \sin 4x$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, c) $f(x) = \sin^2 x$, d) $f(x) = \ln(1+2x)$.

6. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty (w których chwilowa prędkość wzrostu funkcji jest równa średniej prędkości wzrostu na danym przedziale):
   a) $f(x) = \arcsin x, [-1, 1]$; b) $g(x) = \ln x, [1, e]$.

7. Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:
   a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$, b) $g(x) = x\ln x$, c) $h(x) = (x-3)\sqrt{x}$,
   d) $p(x) = x + \sin x$, e) $q(x) = \frac{x^3}{x-2}$, f) $r(x) = e^x\cos x$.

8. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2^x-2^{2-x}}{(x-1)^2}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2})$, e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,
   g) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^x$, h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\sin x)^{\mathrm{tg} x}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

9. Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji, wskazanego punktu oraz n: a) $f(x) = \frac{x}{x-1},\ x_0 = 2,\ n = 3$; b) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$.

10. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:
    a) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5}, b) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4},
    c) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ z dokładnością 10^{-3}, e) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3}.

11. Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji na wskazanych przedziałach:
    a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, [-2, 5]$; b) $g(x) = x^2\ln x, [1, e]$;
    c) $h(x) = \mathrm{arctg} x - \frac{x}{2}, [0, 2]$; d) $p(x) = x^2|x^2-1|, [-2, 3]$.

12. Źródło prądu o sile elektromotorycznej $e = 30V$ i oporze wewnętrznym $r_w = 2\Omega$ zasila odbiornik energii elektrycznej. Gdy natężenie prądu pobieranego wynosi i, wtedy moc dostarczana odbiornikowi wynosi $P = 30i - 2i^2$. Wyznaczyć natężenie prądu i, przy którym pobierana przez odbiornik moc będzie największa.

13. Przy pomiarze natężenia prądu za pomocą busoli stycznych (rodzaj galwanometru) błąd procentowy pomiaru jest wprost proporcjonalny do wielkości $\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x$, gdzie x jest kątem wychylenia wskazówki galwanometru. Przy jakim wychyleniu x błąd procentowy będzie najmniejszy.

14. Natężenie pola magnetycznego na osi symetrii pojedynczego zwoju o promieniu r zmienia się według wzoru

$$H = \frac{ir^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}},$$

gdzie x jest odległością od płaszczyzny zwoju, i - natężeniem prądu. Jaki promień r powinna mieć zwojnica, żeby przy danym natężeniu i w odległości $x = 5$ cm od płaszczyzny zwojnicy było możliwie największe natężenie pola H.

15. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:
a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, b) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, c) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$, d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$,
f) $f(x) = 2\mathrm{arctg}x - \ln(1 + x^2)$.

16. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:
a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x$, b) $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^3}$, c) $h(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$,
d) $p(x) = \sin^2 x$, e) $q(x) = x^2 \ln x$, f) $r(x) = (1 + x^2)e^x$.

17. Sporządzić wykres funkcji ciągłej na podstawie następujących informacji:
a)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y"	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		0		1		0	

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x - 2) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 2 = 0$;
b)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y"	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		0		$\times$		1	

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x + 1) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 2 = 0$;
c)

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
y"	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y		1		0		-1	

$f(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x + 6 = 0$.

18. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, c) $h(x) = e^{-x^2}$, d) $p(x) = \frac{x}{1-x^2}$.
e) $r(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.