

## Lista zadań dla studentów Energetyki. 5

1. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych i sporządzić ich przybliżone wykresy:

a)  $f(x) = 1 - 2^{-x}$ , b)  $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$ , c)  $q(x) = \ln^3(x+1)$ , d)  $f(x) = (x-2)^2$  dla  $x \geq 2$ .

2. Korzystając definicji Heinego wyznaczyć granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3 + 2x^3)$ , b)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2 - 9}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{x^3 + 1}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .

3. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice funkcji:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{sgn} x)$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|^3}{x^3 - x^2}$ .

4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć podane granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x - 9^x}{5^x - 3^x}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$ ,

e)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ , h)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x})$ .

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x} = 1$ , c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x + \sin^2 x} = 0$ .

6. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}(2x))^{\operatorname{ctg} x}$ , e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$ ,

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$ , h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x}$ , i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x+2})^{2x-1}$ .

7. Znaleźć asymptoty podanych funkcji:

a)  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , b)  $f(x) = e^{-x} \sin x + x$ , c)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$ , d)  $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$ ,

e)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$ , f)  $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ , g)  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ .

8. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić rodzaje nieciągłości w tych punktach:

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$ ; b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ ; c)  $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ .

9. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

a)  $f(x) = x|x|$ ,  $x_0 = 0$ ; b)  $f(x) = |x-1|$ ,  $x_0 = 1$ ; c)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ ,  $x_0 = 1$ .

10. Korzystając z definicji wyznaczyć pochodne podanych funkcji:

a)  $r(x) = x^3$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , gdzie  $x \neq 0$ ; c)  $p(x) = e^{-x}$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ .

11. Korzystając z reguły różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

a)  $y = x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^4}$ , b)  $y = \frac{x - x^2 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$ , c)  $y = x^3 \cdot \operatorname{sh} x$ , d)  $y = (x^2 - 2x) \cdot 2^x$ , e)  $y = \arcsin x \cdot \ln x$ ,

f)  $y = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ , g)  $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ , h)  $y = \arcsin \sqrt[3]{x}$ , i)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ , j)  $y = x^x$ ,

k)  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ , l)  $y = \arcsin \sqrt[4]{1-5x}$ , m)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^x})$ , n)  $y = 3x^{\cos x}$ , o)  $y = \sin^7 \frac{2x+1}{3x+1}$ ,

p)  $y = (\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg} \frac{1}{x})$ , q)  $y = (x^3 + \frac{1}{x^2})e^x$ , r)  $y = \frac{\sin x}{x^4 + 4}$ , s)  $y = \frac{\arcsin x}{e^x}$ , t)  $y = (1 + \sqrt[4]{x})\operatorname{tg}(\sqrt{x})$ .