

Lista zadań dla studentów Energetyki. 4

1. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone i znaleźć ich kresy:

$$A = \{(-3)^n : n \in \mathbb{N}\}, B = \{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}, C = \{2^z : z \in \mathbb{Z}\}, D = \left\{ \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}, E = \{3-|x| : x \in \mathbb{R}\}, \\ F = \left\{ \frac{1}{x} : x \in (0, 1] \right\}, G = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}, H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0\}.$$

2. Napisać cztery początkowe wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym a_n :

$$a_n = \frac{3n-2}{2^n}, b_n = \frac{n+5}{2n+1}, c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}; d_n = \sqrt{2n^2 - n}, e_n = \frac{n!-1}{2n^2+3}, f_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}.$$

3. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, b_n = \frac{10^n}{n!}, c_n = \cos \frac{\pi}{2n}, d_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}, e_n = \frac{3n+2}{n+4}, f_n = \frac{n!}{n^n}.$$

4. Korzystając z definicji granic właściwej i niewłaściwych ciągu uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2+1) = -\infty$.

5. Wyznaczyć granice ciągów:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+7}{3n^2+5n-6}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+4})^2}{2n+13}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(3n+6)(2n+2)}$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2n^2+5}{(0,5n+1)^3}$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+3)^2}{n^4-9}$,
f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-3n)^2}{(1-2n)^2}$, g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(3n+5)^2}{(1-2n)^2}}$, h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 8^{n+1}}{3 \cdot 8^{n-1}}$, i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n-2}{2-7^{n-1}}$, j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n-5}}{8 \cdot 4^{n+5}}$, k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$,
l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 7n - 1})$, m) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 10n - 3} - \sqrt{2n^2 - 2n + 3})$, n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+2)} - n}{n+2 - \sqrt{n(n+2)}}$.

6. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10 + \sin n}$,
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7}{8}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n}$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin 2n}{(3n-1)^2}$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n \cdot 2^n}$.

7. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć podane granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^n$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n+2}$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-n}$,
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-7}{n}\right)^{n-1}$, g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$, h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+3}{n^3}\right)^{3n^3}$.

8. Obliczyć

a) $\log_{\sqrt{5}} 5^{\sqrt[3]{5}}$, b) $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$, c) $\log_2 8\sqrt{2}$, d) $\log_{\frac{1}{3}} 81\sqrt{3}$, e) $3^{2+\log_3 4}$, f) $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}$, g) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$
h) $\log_2 3 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 8$.

9. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\log_{2\sqrt{2}} x = -3$, b) $\log_x 25 = 2$, c) $\log_4 \log_2 \log_3(x^2 - 63) = \frac{1}{2}$,
c) $\log 5 + \log(x+10) - 1 = \log(21x-20) - \log(2x-1)$, d) $\ln(x^2+1) > \ln(3x-1)$,
e) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5) < \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) + 1$.

10. Określić dziedziny naturalne i zbiory wartości funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, b) $g(x) = \sqrt{-x^2}$, c) $h(x) = \sin \frac{1}{x}$, d) $p(x) = \log_3 |\cos x|$, e) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, f) $g(x) = \frac{1}{1+\cos x}$,
g) $h(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, h) $p(x) = \log_3(1+|x|)$, i) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

11. Określić funkcje złożone $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$, jeżeli:

a) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2$; b) $f(x) = \log_2 x, g(x) = 4^x$; c) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4$.