Lista zadań dla studentów Energetyki. 2

1. Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:

a) $3 \cdot [2,1] + 2 \cdot [-1,4]$; b) $2 \cdot [3,4,-1,3] - 3 \cdot [2,3,1,-2]$; c) $2 \cdot [1,2,3] + 3 \cdot [1,1,1] - [5,7,9]$.

2. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

a) $[1,2,1,2] \circ [1,-1,1,-1]$; b) $([1,-1,2] \circ [2,2,1]) \cdot [1,2,3]$; c) $\dfrac{[1,2,-2]}{\sqrt{[1,2,-2] \circ [1,2,-2]}}$.

3. Wektor $\vec{v}$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{x} = [1,0,0]$, $\vec{y} = [1,1,0]$ i $\vec{z} = [1,1,1]$

a) $\vec{v} = [2,3,1]$; b) $\vec{v} = [1,3,-1]$; c) $\vec{v} = [3,5,4]$. Wsk. Zapisać najpierw wektory $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$ bazy kanonicznej jako kombinacje wektorów $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

4. Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1,1,1], [1,1,0], [1,0,0]$; b) $[1,2,1], [2,1,2], [1,1,1]$ c) $[1,2,3], [1,2,4], [1,2,5]$; c) $[1,1,1], [1,2,3], [2,2,2]$

d) $[1,-1,1,-1], [1,1,1,1], [0,5,0,5]$; e) $[1,2,1,0], [5,7,9,0], [1,2,3,4]$.

5. Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

a) $([1,1,0], [1,0,1], [0,1,1])$; b) $([1,2,3], [3,2,1], [5,2,5])$; c) $([4,1,2], [3,1,1], [2,3,3])$.

Wsk. W zadaniach (4) i (5) skorzystać z faktu, że odjęcie od dowolnego wektora danego układu kombinacji liniowej pozostałych nie zmienia liniowej zależności (niezależności) układu. Układy sprowadzić w ten sposób do postaci, w której liniowa zależność bądź niezależność jest bezpośrednio widoczna (jak np. z zad. 3).

6. Obliczyć:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \right)$;

c) $\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 6 & -14 \\ -21 & 30 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & -6 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 7 & -2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; j) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^T \cdot B^T$ i $B^T \cdot A^T$.

8. Obliczyć rzędy macierzy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ -5 & -5 & -20 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & 17 & 9 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

9. Badając rzędy odpowiednich macierzy sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1,2,3,4], [1,2,1,2], [4,3,2,1], [2,1,2,1]$; b) $[2,3,1,2,3], [1,3,2,1,3], [0,1,1,0,1]$.

c) $[1,1,2,2], [1,-1,1,-1], [3,1,5,5]$.

10. Obliczyć podane wyznaczniki (w d), e) wyciągnąć stałe przed wyznacznik):

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -12 & 6 & 0 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 12 & 24 & 12 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$.

11. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

12. Doprowadzić do prostszej postaci i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

13. Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

14. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

15. Wyznaczyć macierze X i Y z równań: $X \cdot A + B = C$ i $DY = EY + F$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + z = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 6y + 3z = -12 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ 2x + 2z - t = 3 \\ 3x - y + 3z - t = 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

17. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.