Tw. 1. *Jeżeli funkcja f spełnia dla wszystkich x pewnego przedziału warunek:*

1. $f'(x) = 0$, *to jest stała;*
2. $f'(x) > 0$, *to jest rosnąca;*
3. $f'(x) \geq 0$, *to jest niemalejąca;*
4. $f'(x) < 0$, *to jest malejąca;*
5. $f'(x) \leq 0$, *to jest nierosnąca; na tym przedziale.*

Def. 1. Funkcja f ma w punkcie w punkcie x_0 *minimum lokalne* (odp. *minimum lokalne właściwe*), gdy $f(x) \geq f(x_0)$ (odp. $f(x) > f(x_0)$) dla wszystkich punktów x pewnego sąsiedztwa punktu x_0. Analogicznie określamy *maksimum lokalne* i *maksimum lokalne właściwe.* Maksima i minima lokalne nazywamy *ekstremami* lokalnymi.

Tw. 2 (Fermata)**.** *Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0 i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to*

$$f'(x_0) = 0.$$

Uwaga 1. Funkcja może mieć ekstremum tylko w punktach, w których pochodna zeruje się lub nie istnieje. Ze znikania pochodnej $f'(x_0)$ nie wynika, że f ma w tym punkcie ekstremum.

Tw. 3 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum I)**.** *Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje taka $\delta > 0$, że*

1. $f'(x_0) < 0$ *dla* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *i* $f'(x_0) > 0$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *to f ma minimum lokalne właściwe w x_0,*
2. $f'(x_0) > 0$ *dla* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *i* $f'(x_0) < 0$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *to f ma maksimum lokalne właściwe w x_0.*

Tw. 4 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum II)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = f"(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$,
3. *n jest liczbą parzystą,*

to f ma w x_0 maksimum lokalne właściwe.

Uwaga 2. Jeżeli w założeniach twierdzenia zamienimy (2) na $f^{(n)}(x_0) > 0$, to f ma w x_0 minimum. Jeżeli natomiast n jest liczbą nieparzystą i $f^{(n)} \neq 0$, to f nie ma ekstremum w x_0.

Przykład: 1.

1. Wyznaczyć wartości największą i najmniejszą funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ na przedziale $[-1, 2]$.
2. Który z trójkątów równoramiennych wpisanych w dany okrąg ma największe pole?

Wyznaczanie wartości największej i największej funkcji ciągłej na $[a, b]$:
Należy wyznaczyć wartości funkcji w następujących punktach:

1. końcach przedziału,
2. miejscach zerowych pochodnej,
3. punktach, w których pochodna nie istnieje.

Następnie należy wybrać z nich wartość największą i najmniejszą.

Def. 2. Funkcja f jest *wypukła* na przedziale (a, b) gdy dla dowolnych trzech punktów $x_1 < x_2 < x_3$ tego przedziału zachodzi

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

(Wykres funkcji znajduję się pod sieczną). Jeśli nierówność jest ostra, to funkcję nazywamy *ściśle wypukłą*. Jeśli zmienimy nierówność na przeciwną, to otrzymamy definicję funkcji wklęsłej.

Uwaga 3. Dla funkcji różniczkowalnych warunek ścisłej wypukłości czy wklęsłości można sformułować za pomocą stycznej. Dla funkcji wypukłej wykres funkcji znajduje się powyżej stycznej w dowolnym punkcie przedziału a dla wklęsłej poniżej.

Tw. 5. *Jeżeli $f"(x) > 0$ ($f"(x) < 0$) dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja jest ściśle wypukła (odpowiednio: ściśle wklęsła) na (a, b).*

Def. 3. Mówimy, że funkcja f ma w x_0 *punkt przegięcia* gdy ma w x_0 pochodną (właściwą lub niewłaściwą) i jest ściśle wypukła w prawym lub lewym sąsiedztwie x_0 a ściśle wklęsła w drugim z jednostronnych sąsiedztw.

Tw. 6 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeżeli f ma w x_0 punkt przegięcia i drugą pochodną, to $f"(x_0) = 0$.*

Tw. 7 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia I)**.** *Jeżeli funkcja ma pochodną $f'(x_0)$ (właściwą lub niewłaściwą) oraz $f"(x)$ ma przeciwne znaki w każdym punkcie lewego i prawego sąsiedztwa punktu x_0, to f ma w x_0 punkt przegięcia.*

Tw. 8 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia II)**.** *Jeżeli funkcja f spełnia warunki:*

1. $f'(x_0) = f"(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
3. *n jest liczbą nieparzystą większą od 2,*

to f ma w x_0 punkt przegięcia.

Badanie przebiegu funkcji

1. Wyznaczenie dziedziny.
2. Ustalenie podstawowych własności:

   parzystość lub nieparzystość, okresowość,

   przecięcia z osiami układu współrzędnych,

   ciągłość.
3. Obliczenie granic lub wartości na krańcach dziedziny. Wyznaczenie asymptot.
4. Zbadanie pierwszej pochodnej:

   wyznaczenie pochodnej i jej dziedziny,

   ustalenie przedziałów monotoniczności i ekstremów,

   obliczenie granic lub wartości pochodnych jednostronnych na krańcach dziedziny.
5. Zbadanie drugiej pochodnej:

   wyznaczenie drugiej pochodnej i jej dziedziny,

   ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości oraz punktów przegięcia,

   obliczenie wartości pierwszej pochodnej w punktach przegięcia.

Sporządzenie tabeli i wykresu

Uwaga 4. Wykonanie wykresu rozpoczynamy od naniesienia punktów szczególnych i narysowania asymptot.

Przykład: 2. Sporządzić wykres funkcji na podstawie następujących informacji:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	-1	$-$
y"	$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		-2		0		-2	

$f(-1)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-4.$

Przykłady: 1. 1. Sporządzić wykres funkcji ciągłej na podstawie następujących informacji:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	$\times$	0
y"	$+$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$	0
y		0		2		1	

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0.$$

2. Sporządzić wykres funkcji

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$