Pochodna funkcji

Def. 1. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

o ile granica ta istnieje i jest właściwa. Funkcję f nazywamy wtedy *różniczkowalną*. Przy założeniu, że f jest ciągła w x_0 analogicznie określamy pochodne niewłaściwe $+\infty$ i $-\infty$. Pochodną lewostronną i prawostronną nazywamy odpowiednio:

$$f'_-(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{i} \quad f'_+(x_0) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ilorazem różnicowym nazywamy wyrażenie

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Uwaga 1. W definicji pochodnej niewłaściwej zakładamy dodatkowo ciągłość funkcji w punkcie x_0. Założenie, to jest zbędne dla pochodnej właściwej ponieważ z istnienia granicy właściwej

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

wynika ciągłość funkcji w punkcie x_0. W każdym przypadku zachodzi:

Twierdzenie 1. *Jeśli istnieje właściwa lub niewłaściwa pochodna $f'(x_0)$, to funkcja f jest ciągła w x_0.*

Def. 2. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$ gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję, która każdemu $x \in X$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$ w tym punkcie nazywamy pochodną f' na zbiorze X.

Przykłady: 1. Wyznaczyć pochodną funkcji:

1. sin w punkcie $x_0 = 0$,
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 0$,
3. $f(x) = e^x$ w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}$,
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ w dowolnym punkcie $x \neq 0$.

Czy istnieją pochodne funkcji:

1. sgn,
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

w punkcie $x_0 = 0$.

Interpretacja geometryczna i fizyczna

- Pochodna właściwa w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0.
- Jeśli $f'(x_0) = \pm\infty$, to styczna do wykresu jest prostą pionową $x = x_0$.
- Równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f różniczkowalnej w punkcie x_0:
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$
- Pochodna wyraża szybkość przyrostu funkcji w chwili x_0.
- Jeśli $s = s(t)$, jest funkcją drogi w zależności od czasu, to pochodna $s'(t_0)$ jest prędkością w chwili t_0.
- Jeśli $v = v(t)$, jest funkcją prędkości w zależności od czasu, to $v'(t_0)$ jest przyśpieszeniem w chwili t_0.

Twierdzenie 2. *Jeśli f, g mają pochodne w x_0, to*

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ *o ile* $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 3.

1. *Jeżeli f ma pochodną w punkcie x_0 a g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$
2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła i ściśle monotoniczna w otoczeniu punktu x_0 oraz ma pochodną $f'(x_0) \neq 0$, to*
$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pochodne funkcji elementarnych

1. $c' = 0$ (pochodna funkcji stałej jest równa 0),
2. $(x^r)' = rx^{r-1}$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$,
3. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$,
4. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

5. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$,
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
8. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
9. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$, $(\mathrm{ch} x) = \mathrm{sh} x$,
10. $(\mathrm{th} x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $(\mathrm{cth} x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Wyrażenia wykładniczo-potęgowe

$$\big(f(x)^{g(x)}\big)' = \big(e^{g(x)\ln f(x)}\big)' = f(x)^{g(x)}\big(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\big).$$

Przykład: 1. Wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ w dowolnym punkcie dziedziny naturalnej.

Def. 3. *Różniczką* funkcji f różniczkowalnej w x_0 nazywamy funkcję df przyrostu argumentu $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Uwaga 2. Różniczka jest funkcją liniową przyrostu argumentu.

Uwaga 3. Różniczka szybciej zbiega do przyrostu wartości funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ niż $\Delta x \to 0$. Dokładniej

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Dlatego dla małych Δx stosujemy przybliżenie

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przykłady: 2.

1. Wyznaczyć bez kalkulatora przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[3]{8,03}$.
2. Z jaką dokładnością wyznaczymy objętość sześcianu jeśli zmierzona z dokładnością do 1 cm długość jego krawędzi jest równa 1 m?

Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 4 (Rolle'a). *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że $f'(c) = 0$.*

Twierdzenie 5 (Lagrange'a). *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teza oznacza, że średnia prędkość wzrostu funkcji na przedziale $[a,b]$ musi być osiągana w pewnym jego punkcie.

Przykład: 2. Wyznaczyć średnią prędkość wzrostu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0,4]$ i punkt, w którym jest osiągana.

Twierdzenie 6 (Reguła de L'Hospitala). *Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *przy czym* $g(x) \neq 0$ *w sąsiedztwie* x_0,
2. *istnieje* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie jest również prawdziwe dla granic jednostronnych, granic w nieskończoności oraz przy pierwszym założeniu postaci:

1'. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Przykłady: 3. Wyznaczyć granice: (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

Def. 4. Pochodne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie:

1. $$f^{(1)}(x) := f'(x),$$
2. Dla $n > 1$: $$f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}\right)'(x).$$

   Stosujemy również oznaczenia

   $$f'', f''', f^{iv}, \ldots$$

   oraz

   $$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Przykład: 3. Wyznaczyć wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x) = xe^x$.

Twierdzenie 7 (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a). *Jeżeli f ma ciągłą pochodną $f^{(n-1)}$ na przedziale $[x_0, x]$ oraz pochodną $f^{(n)}$ na przedziale (x_0, x), to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$, że*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Wyrażenie

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazywamy *resztą w postaci Lagrange'a* a całą resztę sumy - *wielomianem Taylora.*

Wn. 1 (Wzór Maclaurina). *Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przyjmuje postać:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

Przykład 1 (Szeregi Maclaurina dla funkcji e^x, $\sin x$ i $\cos x$:). 1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^c$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos c$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos c$

Wyznaczyć $\cos 0,2$ z dokładnością do 10^{-4}.