Granica właściwa

Def. 1. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$, (1) *sąsiedztwem*, (2) *lewym sąsiedztwem*, (3) *prawym sąsiedztwem* punktu x_0 o promieniu ε nazywamy odpowiednio zbiory:

1. $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$,
2. $(x_0 - \varepsilon, x_0)$,
3. $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Def. 2 (Granica właściwa funkcji według Heinego)**.** Mówimy, że funkcja f określona w sąsiedztwie punktu x_0 zbiega do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do x_0 ciągu (x_n) punktów sąsiedztwa punktu x_0, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do g.

Przykłady: 1. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x^3+2} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{sgn} x$ nie istnieje, $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ nie istnieje.
3. Funkcja Dirichleta nie ma granicy w żadnym punkcie.

Def. 3. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę lewostronną $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do x_0 ciągu (x_n) punktów lewego sąsiedztwa x_0, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do g. Analogicznie określamy granicę prawostronną, którą oznaczamy

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Twierdzenie 1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$

Twierdzenie 2 (Definicja Cauchy'ego granicy funkcji)**.**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \neq x_0} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Def. 4 (Granica właściwa funkcji przy $x \to +\infty$)**.** Mówimy, że funkcja f zbiega w nieskończoności do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do ∞ ciągu (x_n), ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do g. Analogicznie określamy granicę przy $x \to -\infty$. Mówimy, że funkcja f ma asymptotę poziomą $y = g$ w $\pm\infty$ gdy $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = g$.

Def. 5 (Granice niewłaściwe przy $x \to x_0$).

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do x_0 ciągu (x_n) punktów sąsiedztwa punktu x_0, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do $+\infty$ $(-\infty)$. Analogicznie, gdy ograniczymy się do punktów lewego lub prawego sąsiedztwa, definiujemy granice jednostronne

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\ (-\infty); \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty\ (-\infty)$$

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f gdy $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$. Analogicznie określamy asymptotę pionową prawostronną. Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest asymptotą obustronną funkcji f gdy jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

Granice niewłaściwe w $+\infty$ i $-\infty$ i asymptoty ukośne

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do ∞ ciągu (x_n), ciąg wartości $(f(x_n))$ również zbiega do ∞. Analogicznie określamy granice $-\infty$ i granice przy $x \to -\infty$.

Def. 6. Mówimy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ gdy

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Analogicznie określamy asymptotę ukośną w $-\infty$.

Ta sama funkcja może mieć różne asymptoty ukośne w $+\infty$ i $-\infty$. W celu wyznaczenia asymptoty ukośnej najpierw obliczamy $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i jeśli ta granica istnieje (i jest właściwa), to $b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - ax)$.

Arytmetyka granic

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcje f, g mają w x_0 granice właściwe, to:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,

Uwaga 1. Twierdzenie stosujemy również do $x_0 = \pm\infty$ oraz do granic jednostronnych.

Wyznaczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$

Przykład: 1. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = x + \mathrm{arctg} x$.

Twierdzenie 4 (O granicy funkcji złożonej)**.** *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$ *w sąsiedztwie punktu* x_0 *i* $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$, *to*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = q.$$

Twierdzenie 5 (O trzech funkcjach)**.** *Jeżeli w sąsiedztwie punktu* x_0 *funkcje* f, g, h *spełniają warunek* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = q$, *to*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = q.$$

Ważne granice wyrażeń nieoznaczonych

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^r-1}{x} = r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$,

Ważna równość: $a^x = e^{x \ln a}$.

Def. 7. Mówimy że funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 jest *ciągła* w punkcie x_0 gdy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(istnieje granica i jest równa wartości funkcji). Mówimy, że f jest ciągła w zbiorze X, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Rodzaje nieciągłości:

- Mówimy, że f ma w x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju gdy ma obie granice właściwe jednostronne w x_0 ale nie jest ciągła. W szczególności jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, to mówimy o nieciągłości typu skok.
- Funkcja f ma w x_0 nieciągłość drugiego rodzaju gdy przynajmniej jedna granica jednostronna nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 6. *1. Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji f, g ciągłych w x_0 są ciągłe w x_0. Przy ilorazie $\frac{f}{g}$ zakładamy dodatkowo $g(x_0) \neq 0$.*

2. Jeżeli f jest ciągła w x_0 i g jest ciągła w $f(x_0)$, to $g \circ f$ jest ciągła w $f(x_0)$.

3. Jeżeli f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i ściśle rosnąca (malejąca), to f^{-1} jest ciągła na $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$).

4. Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach naturalnych.

Twierdzenie 7 (Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

Twierdzenie 8 (Darboux)**.** *Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$. (Jeśli funkcja ciągła na $[a, b]$ przyjmuje wartość ujemną i wartość dodatnią, to przyjmuje wartość 0.)*

Przykłady: 2. 1. Wykazać, że wśród trójkątów równoramiennych wpisanych w dany okrąg istnieje trójkąt o największym polu.

2. Uzasadnić, że w każdej chwili czasu na kuli ziemskiej jest nieskończenie wiele par punktów antypodycznych o jednakowych temperaturach.