Def. 1. *Funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej* nazywamy funkcję, której dziedzina i przeciwdziedzina są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

$$f : X \to Y$$

gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Jeśli funkcja jest określona jedynie wzorem, to za dziedzinę przyjmujemy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór ma sens. Tak określoną dziedzinę nazywamy *dziedziną naturalną*. *Zbiorem wartości* nazywamy zbiór wszystkich elementów $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$, taki że $f(x) = y$. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji f oznaczamy odpowiednio D_f i W_f.

Przykład: 1. Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_f =[-1,1]$, $\qquad W_f =[0,1]$.

Def. 2. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy:

1. różnowartościową gdy $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
2. *na* gdy $Y = W_f$,
3. *bijekcją* (*przekształceniem wzajemnie jednoznacznym*) gdy jest różnowartościowa i na,
4. *parzystą* gdy $f(-x) = f(x)$ dla $x \in D_f$ (wykres jest symetryczny względem Oy),
5. *nieparzystą* gdy $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in D_f$ (wykres jest symetryczny względem O),
6. *rosnącą* gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, analogicznie określamy funkcje niemalejące, malejące i rosnące,
7. *okresową* gdy $f(x+T) = f(x)$ dla pewnego $T \in \mathbb{R}$ (T nazywamy okresem),
8. *ograniczoną* gdy zbiór jej wartości jest ograniczony.

Def. 3. Jeśli $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, to *złożeniem* (*superpozycją*) funkcji f, g nazywamy funkcję

$$g \circ f : X \to Z; \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

f nazywamy funkcją *wewnętrzną*, a g - *zewnętrzną* złożenia $g \circ f$.

Przykład: 2. Dla funkcji $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\;(g \circ f)(x) = |x|$, $f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $\;(f \circ g)(x) = x$.

Def. 4. Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to funkcją *odwrotną* do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \to X$ określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Wykresy funkcji f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$.

Logarytmy

Def. 5. Dla dowolnej liczby $a > 0$, $a \neq 1$ i liczby $x > 0$ *logarytmem* z x przy podstawie a nazywamy liczbę $y = \log_a x$, taką że $a^y = x$. Dla $a = 10$ piszemy $\log x$ a dla $a = e$ piszemy ln i nazywamy je odpowiednio *logarytmem dziesiętnym* i *logarytmem naturalnym.*

Wn. 1. *Funkcja* $f(x) = \log_a x$ *jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej* $g(x) = a^x$.

Twierdzenie 1. *Własności logarytmów*

1. $\log_a 1 = 0$ *dla dowolnej podstawy* a $(a > 0,\ a \neq 1)$,
2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
3. $\log_a x^r = r \log_a x$,
4. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$,
5. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log b}{\log a}$.

Funkcje hiperboliczne

Def. 6. *Sinusem hiperbolicznym* oraz odpowiednio kosinusem, tangensem i kotangensem hiperbolicznym nazywamy funkcje:

$$\mathbf{sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathbf{ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\mathbf{th}x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \mathbf{cth}x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

Twierdzenie 2 (Własności funkcji hiperbolicznych). *1.* $\mathbf{ch}^2 x - \mathbf{sh}^2 x = 1$,

2. $\mathbf{ch}^2 x + \mathbf{sh}^2 x = \mathbf{ch}2x$,
3. $\mathbf{th}x = \dfrac{\mathbf{sh}x}{\mathbf{ch}x}$,
4. $\mathbf{cth}x = \dfrac{\mathbf{ch}x}{\mathbf{sh}x}$.

Funkcje elementarne

1. Wielomiany $W(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $D_W = \mathbb{R}$,
2. Funkcje wymierne $Q(x) = \frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie W, V są wielomianami, $D_Q = \mathbb{R} \setminus \{x :\ V(x) = 0\}$,
3. Funkcja potęgowa $f(x) = x^r$, gdzie $r \in \mathbb{R}$, $D_f = (0, +\infty)$,
4. Funkcje trygonometryczne sin, cos, tg, ctg.

5. Funkcje cyklometryczne:

   arcsin (arkus sinus) to funkcja odwrotna do funkcji $\sin : \ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

   arccos - odwrotna do funkcji $\cos : \ [0, \pi] \to [-1, 1]$,

   arctg - odwrotna do funkcji tg: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

   arcctg - odwrotna do funkcji ctg: $(0, \pi) \to \mathbb{R}$,

6. funkcje wykładnicza, logarytmiczna i hiperboliczne.

7. *Funkcjami elementarnymi* nazywamy wszystkie funkcje jakie można otrzymać z (1)...(6) za pomoc działań arytmetycznych i operacji składania.

Przykłady funkcji nieelementarnych

1. Funkcja *signum* (znak)

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1 & dla \quad x < 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ 1 & dla \quad x > 0 \end{cases}$$

2. Funkcja Dirichleta

$$D(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & dla \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. Funkcja *część całkowita* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ przyporządkowuje liczbie rzeczywistej x największą liczbę całkowitą k nie większą od x.

$$E(x) = k \Leftrightarrow x \in [k, k + 1).$$