Zbiory ograniczone i kresy zbiorów

Def. 1. Liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym* a liczbę M *ograniczeniem górnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ gdy

$$(i) \quad \bigwedge_{x\in X} x \geq m; \qquad\qquad (ii) \quad \bigwedge_{x\in X} x \leq M.$$

Mówimy, że zbiór X jest *ograniczony z dołu* (odp. *z góry*) gdy ma ograniczenie dolne (odp. górne). Zbiór nazywamy *ograniczonym* gdy jest ograniczony z dołu i z góry, tzn.

$$\bigvee_{m,M\in\mathbb{R}} \ \bigwedge_{x\in X} m \leq x \leq M.$$

Def. 2. Liczbę a nazywamy *kresem dolnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ jeśli jest jego największym ograniczeniem dolnym, tzn.

$$\bigwedge_{x\in X} x \geq a \quad \text{i} \quad \bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{x_0\in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

Liczbę b nazywamy *kresem górnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ jeśli jest jego najmniejszym ograniczeniem górnym, tzn.

$$\bigwedge_{x\in X} x \leq b \quad \text{i} \quad \bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{x_0\in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Kres dolny zbioru X oznaczamy $\inf X$ a górny $\sup X$ piszemy również $\inf X = -\infty$ ($\sup X = \infty$), gdy X nie jest ograniczony z dołu (odp. z góry).

Twierdzenie 1 (Aksjomat ciągłości (zbioru liczb rzeczywistych))**.** *Każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny. (Każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.)*

Ciągi liczbowe

Def. 3. *Ciągiem* nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych.Wartość tej funkcji dla danej liczby naturalnej n nazywamy n-tym *wyrazem* ciągu i oznaczamy a_n (b_n itp.). Ciąg oznaczamy (a_n) a zbiór jego wyrazów (czyli wartości funkcji) $\{a_n\}$.

Przykłady: 1. 1. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ to ciąg określony wzorem,

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, ...$

2. $b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ to ciąg określony rekurencyjnie, jest to słynny *ciąg Fibbonaciego*,

   $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

3. (c_n) - ciąg kolejnych liczb pierwszych to ciąg określony opisowo,

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$.

- Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony (z góry) [z dołu] gdy zbiór $\{a_n\}$ jego wyrazów jest odpowiednio: ograniczony (z góry) [z dołu].

- Ciąg (a_n) nazywamy: (i) *rosnącym*, (ii) *niemalejącym* gdy odpowiednio:

  (i) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$; (ii) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \le a_{n+1}$. Analogicznie określamy ciągi: *malejący* i *nierosnący*. Ciągi malejące i rosnące nazywamy *ściśle monotonicznymi* a nierosnące i niemalejące *monotonicznymi*. Mówimy też o ciągach monotonicznych od pewnego miejsca.

- Monotoniczność ciągu (a_n) określamy badając znak różnicy kolejnych wyrazów $a_{n+1}-a_n$. Jeśli ciąg (b_n) ma wyrazy dodatnie, to możemy też porównywać iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ z 1.

- Dla ciągów z poprzedniego przykładu zachodzi:

  a_n jest ograniczony i nie jest monotoniczny,

  ciąg Fibbonaciego b_n jest ograniczony z dołu, niemalejący i rosnący od drugiego miejsca,

  ciąg c_n jest ograniczony z dołu i rosnący.

Granica właściwa ciągu

Def. 4 (granica właściwa)**.** Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim a_n = a \qquad (\text{lub } \lim_{n\to\infty} a_n = a)$$

gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Przykłady: 2. 1. $\lim \dfrac{(-1)^n}{2n} = 0.$

2. Ciąg określony wzorem $d_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ nie jest zbieżny do żadnej granicy.

Granice niewłaściwe

Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do:

1. ∞, co zapisujemy $\lim a_n = \infty$ gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n > M$$

2. $-\infty$, co zapisujemy $\lim a_n = -\infty$ gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n < -M$$

Przykłady: 3. 1. Ciąg Fibbonaciego jest zbieżny do nieskończoności.

2. $\lim(n - n^2) = -\infty$.

3. Ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny do żadnej granicy.

Arytmetyka granic

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
2. $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$,
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *o ile* $\lim b_n \neq 0$,
5. $\lim(a_n)^k = (\lim a_n)^k$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}$,
6. $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$.

Wyznaczyć granice danych ciągów: $a_n = \dfrac{3n^3 - n^2}{n^3 + 5n^2 + n}$; $b_n = (\sqrt{n^2 + 10} - n)$; $c_n = \sqrt{\dfrac{4^n + 2^n}{2^{2n} + 3^n}}$.

Twierdzenie 3. 1. *Jeśli* $lim a_n = \pm\infty$, *to* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ ($\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

2. *Jeżeli* $\lim a_n = 0$ *i* $a_n > 0$ ($a_n < 0$), *to* $\lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$ $(-\infty)$ ($\frac{1}{0^+} = \infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$).

Podobnie: $a + \infty = \infty$; $a \cdot \infty = \infty$ i $\infty^a = \infty$ dla $a > 0$; $\infty^a = 0$ dla $a < 0$; $a^\infty = \infty$ dla $a \geq 1$ i $a^\infty = 0$ dla $a \in (0, 1)$.

Twierdzenie 4 (O trzech ciągach)**.** *Jeżeli* $\lim a_n = \lim c_n = b$ *oraz* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim b_n = b$.

Przykłady: 4. 1. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$;

2. $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ dla dowolnego $a > 0$;

3. Wyznaczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$.

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $\lim a_n = \infty$ *oraz* $a_n \leq b_n$ *dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim b_n = \infty$.

Twierdzenie 6. *Jeżeli ciąg jest rosnący i ograniczony z góry, to ma granicę właściwą.*

Def. 5. Liczbą Eulera e nazywamy granicę ciągu $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$$e := \lim(1 + \tfrac{1}{n})^n.$$

$e \approx 2,72 \approx 2,718281828459045...$ jest liczbą niewymierną.

Przykłady: 5. Obliczyć granice: $\lim(1 + \frac{1}{2n})^n$; $\quad \lim(1 - \frac{1}{n})^n$; $\quad \lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

Def. 6. Dla dowolnego ciągu (a_n) i dowolnego rosnącego ciągu (n_k) liczb naturalnych, ciąg (a_{n_k}) nazywamy podciągiem ciągu (a_n).

Twierdzenie 7. *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny do* a, *to każdy jego podciąg jest zbieżny do* a.

Twierdzenie 8. *Jeżeli* $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \pm\infty$, *to*

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \lim(1 + \frac{1}{b_n})^{b_n} = e.$$

Twierdzenie 9 (Bolzano-Weierstrassa)**.** *Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny do granicy właściwej.*

Def. 7. Punktem skupienia ciągu (a_n) nazywamy granicę (właściwą lub nie) dowolnego jego podciągu. *Granicą dolną* (*górną*) ciągu (a_n) nazywamy odpowiednio kres dolny (górny) zbioru jego punktów skupienia. Oznaczamy je odpowiednio:

$$\underline{\lim} a_n; \quad \overline{\lim} a_n.$$

Przykład: 1. Wyznaczyć granice dolne i górne ciągów:

1. $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$,
2. $b_n = (1 + \dfrac{(-1)^n}{n})^n$.