Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$

Def. 1. Rzeczywistą n-wymiarową przestrzenią wektorową (liniową) $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór n-wyrazowych ciągów liczb rzeczywistych $[x_1, x_2, ..., x_n]$ z następującymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby: $[x_1, x_2, ..., x_n]+[y_1, y_2, ..., y_n] := [x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n]$, $a\cdot[x_1, x_2, ..., x_n] := [a\cdot x_1, a\cdot x_2, ..., a\cdot x_n]$. wektory oznaczamy:

$$\overrightarrow{x} := [x_1, x_2, ..., x_n].$$

Iloczynem skalarnym wektorów $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ nazywamy liczbę: $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$. Wektory $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ nazywamy *prostopadłymi* gdy $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = 0$. *Długością wektora* $\overrightarrow{x}$ nazywamy $\sqrt{\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{x}}$.

Własności przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Wektor *zerowy* to $\overrightarrow{0} := [0, 0, ..., 0]$

1. $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{x}$
2. $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
3. dla każdego $\overrightarrow{x}$ istnieje $\overrightarrow{y}$, taki że $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$

   (wektor przeciwny $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$)
4. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
5. $a(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = a\overrightarrow{x} + a\overrightarrow{y}$
6. $(a+b)\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{x}$
7. $a(b\overrightarrow{x}) = (ab)\overrightarrow{x}$

Uwaga 1. Dowolny zbiór "wektorów"V z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby, które spełniają warunki 1.,...,7. nazywamy *przestrzenią liniową.*

Liniowa niezależność wektorów

Def. 2. Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ o współczynnikach $a_1, a_2, ..., a_k$ nazywamy wektor

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = a_1 \overrightarrow{x}_i + a_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + a_k \overrightarrow{x}_k.$$

Def. 3. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ są *liniowo niezależne* gdy z zerowania się dowolnej ich kombinacji liniowej wynika zerowanie się wszystkich współczynników tej kombinacji.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0.$$

Uwaga 2. Wektory są liniowo zależne gdy istnieją takie $a_1, a_2, ..., a_k$, nie wszystkie równe 0, że $\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0}$.

Twierdzenie 1. *Wektory są liniowo zależne* $\Leftrightarrow$ *jeden z nich można zapisać jako kombinację liniową pozostałych.*

Def. 4. Maksymalny układ wektorów liniowo niezależnych nazywamy *bazą*. Ilość wektorów bazy nazywamy *wymiarem przestrzeni*. *Bazę kanoniczną* przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tworzą wektory $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$. Analogicznie dla dowolnego n.

Twierdzenie 2. *Wektory* $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n$ *tworzą bazę przestrzeni* $\Leftrightarrow$ *każdy wektor można zapisać jednoznacznie w postaci ich kombinacji liniowej.*

Macierz

Def. 5. Niech $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. *Macierzą* o m wierszach i n kolumnach nazywamy dowolną funkcję, która wszystkim parom (i, j) przyporządkowuje liczby rzeczywiste a_{ij}. Stosujemy oznaczenia: $A, \quad A_{m\times n}, \quad (a_{ij}), \quad (a_{ij})_{m\times n}$.

Macierz zapisujemy: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Wiersze macierzy są wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a kolumny $\mathbb{R}^m$. Macierz można natomiast traktować jako wektor przestrzeni $\mathbb{R}^{m\cdot n}$. $(m \times m)$-macierze nazywamy *kwadratowymi*.

Działania na macierzach

Macierze o tych samych wymiarach dodajemy i mnożymy przez liczby tak samo jak wektory przestrzeni $\mathbb{R}^{m\cdot n}$ tzn.:$c \cdot (a_{ij})_{m\times n} := (c \cdot a_{ij})_{m\times n}$; $(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Def. 6. Iloczynem macierzy $(a_{ij})_{m\times k}$ i $(b_{ij})_{k\times n}$ nazywamy macierz $(c_{ij})_{m\times n}$, której współczynniki są określone wzorem:

$$c_{ij} := \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

(wyraz c_{ij} macierzy wyniku jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza pierwszej i j-tej kolumny drugiej macierzy.)

Uwaga 3.

1. Można mnożyć macierze tylko wtedy, gdy wiersze pierwszej są tej samej długości co kolumny drugiej, czyli gdy pierwsza ma tyle samo kolumn co druga wierszy.
2. Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

- Transpozycją macierzy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ nazywamy macierz A^T, której wierszami są kolumny macierzy A (a kolumnami oczywiście wiersze macierzy A).
- Macierz kwadratową (a_{ij}) nazywamy:

  diagonalną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ (zera poza główną przekątną),

  trójkątną górną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (zera pod główną przekątną),

  trójkątną dolną gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (zera nad główną przekątną).
- Macierzą jednostkową nazywamy macierz diagonalną, dla której dodatkowo $a_{ii} = 1$ czyli na głównej przekątnej stoją jedynki. Macierze jednostkowe oznaczamy I lub I_n gdy chcemy podać wymiar.
- Jeśli tylko działania są wykonalne to dla dowolnych macierzy A, B i jednostkowej I mamy $AI = A$ i $IB = B$.
- Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A nazywamy macierz A^{-1}, taką że $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Własności działań na macierzach

Jeśli tylko wskazane działania można wykonać, to:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
7. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Przykład: 1. Wyznaczyć macierze X, Y z równań:

- $A \cdot X + B = C$
- $Y \cdot D - E = Y \cdot F$.

Rząd macierzy

Twierdzenie 3. *W dowolnej macierzy maksymalna ilość liniowo niezależnych wierszy jest równa maksymalnej ilości liniowo niezależnych kolumn.*

Def. 7. Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych wierszy (lub kolumn). Rząd macierzy A oznaczamy rA.

Twierdzenie 4. *Rząd macierzy A nie zmieni się gdy:*

1. *dowolny wiersz pomnożymy przez liczbę różną od zera,*
2. *dowolnie zmienimy kolejność wierszy,*
3. *do wiersza dodamy kombinację liniową innego wiersza,*
4. *wykreślimy wiersz złożony z samych zer,*
5. *przetransponujemy macierz,*
6. *wykonamy jakąkolwiek z operacji 1.2.3.4. na kolumnach.*

Rząd macierzy schodkowej

Przykład: 2. $r\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3. \qquad r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4.$

Def. 8. Macierzą *schodkową* nazywamy macierz, której pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy znajdują się w coraz dalszych kolumnach, a wiersze zerowe umieszczone są najniżej.

Twierdzenie 5. *Rząd macierzy schodkowej jest równy ilości niezerowych wierszy (czyli ilości schodków).*

Uwaga 4. Pierwsze niezerowe elementy każdego wiersza nazywamy elementami *głównymi* (*wiodącymi*). Wygodnie, gdy są jedynkami, wtedy rząd macierzy jest równy ilości głównych jedynek.

Wyznaczanie rzędu macierzy metodą eliminacji Gaussa

Dowolną macierz sprowadzamy do postaci podanej w twierdzeniu za pomocą operacji, które nie zmieniają rzędu:

1. Jako pierwszy ustawiamy wiersz, który najwcześniej ma niezerowy wyraz,
2. jedynkę główną dostajemy dzieląc wiersz przez pierwszy niezerowy wyraz,
3. zera pod jedynką główną dostajemy odejmując odpowiednie kombinacje wiersza z jedynką główną od wierszy znajdujących się niżej,
4. opisaną operację powtarzamy dla kolejnych wierszy, aż do uzykania postaci schodkowej macierzy.

Przykład: 3. Wyznaczyć rzędy danych macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

Uwagi do eliminacji Gaussa

1. Jedynkę główną można też niekiedy uzyskać zamieniając wiersze miejscami.

2. Pojawiające się wiersze zerowe można wykreślać i nie pisać ich w następnych krokach.

3. Łatwo zauważyć liniową zależność dwóch wierszy, ponieważ są one proporcjonalne. Na każdym etapie jeden z takich wierszy można wykreślić. Zostawiamy oczywiście ten drugi!

4. Jeśli zauważymy, że wyrazy stojące pod pierwszym niezerowym wyrazem pierwszego wiersza dzielą się przez ten wyraz, to nie trzeba zamieniać go w jedynkę główną.

Przykład: 4. Badając rząd odpowiedniej macierzy sprawdzić, czy wektory $[2, 1, 4, 3]$, $[1, 1, 1, 1]$ i $[1, 2, 3, 4]$ są liniowo zależne.