

Literatura

- J. Kosiorek, Skróty wykładów i listy zadań. Strona internetowa <http://wmii.uwm.edu.pl/kosiorek/Energetyka/>
- T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1*
Definicje, twierdzenia, wzory
Przykłady i zadania
- (B. Gleichgewicht *Algebra*)
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1*
Definicje, twierdzenia, wzory
Przykłady i zadania
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, część I (II)
- W. Stankiewicz, J. Wojtowicz *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych*, część I (II)

Ciało liczb zespolonych

Def. 1. Ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych z następującymi działaniami dodawania i mnożenia:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Postać algebraiczna:

$$z = x + yi$$

x -część rzeczywista, y -część urojona. Liczby w postaci algebraicznej mnożymy jak wyrażenia algebraiczne uwzględniając równość:

$$i^2 = -1$$

Def. 2. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę zespoloną:

$$\bar{z} = x - yi.$$

Reguła dzielenia: Licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. **Własności sprzężenia:**

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$$3. \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

$$4. \overline{\overline{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$5. z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba \overline{z} również.*

Twierdzenie 2 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych \mathbb{C} .*

Moduł i argument liczby zespolonej

Def. 3. Modułem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argumentem liczby z nazywamy dowolny kąt φ , taki że

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Piszemy *argz*. Dokładnie jeden argument danej liczby jest zawarty w przedziale $[0, 2\pi)$. Nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy *Argz*. **Interpretacja geometryczna:** Argument jest kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą i promieniem wodzącym punktu reprezentującego daną liczbę, a moduł odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gdzie r jest modułem a φ argumentem liczby z .

Przykład: 1. 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających warunki

$$\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2. Równanie $|z - z_0| = r$ opisuje okrąg o środku z_0 i promieniu r .

Ważne wzory trygonometryczne:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej

$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
(Mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy argumenty.)

Twierdzenie 3 (Wzory Moivre'a). Dla dowolnej liczby zespolonej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ i liczby naturalnej n zachodzi:

1. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$,
2. istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Przykład: 2. Wielomian $W(x) = x^4 + 4$ rozłożyć na czynniki stopnia 2.

Postać wykładnicza liczby zespolonej:

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Wn. 1 (Własności symbolu $e^{i\varphi}$). 1. $|e^{i\varphi}| = 1$; $\arg e^{i\varphi} = \varphi + 2k\pi$; $e^{i\varphi} = e^{i\varphi + 2k\pi}$;

2. $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

3. $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

4. $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$.

Wn. 2 (Wzory Eulera).

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Przykład: 3. Stosując wzory Eulera wyrazić $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ za pomocą $\cos 2x$:

Wzory Moivre'a w postaci wykładniczej

Dla $z = r e^{i\varphi}$

1. $z^n = r^n e^{in\varphi}$;

2. istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.