## Przekształcenia liniowe

**Def. 1.** *Przekształceniem liniowym* (*operatorem liniowym*) rzeczywistych przestrzeni liniowych $U$ i $V$ nazywamy dowolną funkcję $L: \ U \to V$ spełniającą warunki:

1. $L(\vec{u}+\vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$ dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v} \in U$;
2. $L(a\vec{u}) = aL(\vec{u})$ dla dowolnych $\vec{u} \in U$ i $a \in \mathbb{R}$.

*Uwaga* 1. Warunki 1., 2. można zastąpić jednym warunkiem:

$$L(a\vec{u} + b\vec{v}) = aL(\vec{u}) + bL(\vec{v})$$

dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v} \in U$ i $a, b \in \mathbb{R}$.

**Twierdzenie 1.** *Przekształcenie liniowe $L: U \to V$ jest określone jednoznacznie przez podanie obrazów wektorów dowolnej bazy przestrzeni $U$.*

## Przykłady z $\mathbb{R}^2$

*Uwaga* 2. W dowolnym przekształceniu liniowych wektor zerowy przechodzi w wektor zerowy.

- Symetrie względem osi układu współrzędnych.
- Symetria względem początku układu współrzędnych.
- Symetria względem prostej $y = x$.
- Jednokładność o środku w początku układu współrzędnych i skali $k$.
- Obrót wokół początku układu współrzędnych o dowolny kąt $\alpha$.
- Rzuty prostokątne na $Ox$ i $Oy$.
- Powinowactwo o osi $Ox$, kierunku $Oy$ i skali $k$

$$[x, y] \mapsto [x, ky].$$

- Przesunięcie o wektor $[a, b]$ nie jest przekształceniem linowym.

## Macierz przekształcenia liniowego

**Def. 2.** Niech $B_U = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n}\}$ i $B_V = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}\}$ będą bazami przestrzeni linowych $U$ i $V$. Macierzą przekształcenia liniowego $L: \ U \to V$ w bazach $B_U$ i $B_V$ nazywamy macierz $A_{m\times n}$, której kolejnymi kolumnami są współrzędne w bazie $B_V$ wektorów

$$L(\vec{u_1}), L(\vec{u_2}), ..., L(\vec{u_n})$$

(czyli obrazów kolejnych wektorów bazy $B_U$).

*Uwaga* 3. Najczęściej za $B_U$ i $B_V$ przyjmujemy bazy kanoniczne przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Gdy mówimy o macierzy przekształcenia liniowego nie wskazując baz zawsze mamy na myśli bazy kanoniczne.

*Uwaga* 4. Dla dowolnej macierzy $A = A_{m\times n}$ istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o macierzy $A$ w bazach kanonicznych (lub dowolnych innych bazach).

**Twierdzenie 2** (O postaci przekształcenia liniowego)**.** *Niech $A = A_{m\times n}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L : U \to V$ w bazach $B_U, B_V$ i niech*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

*będą odpowiednio macierzami współrzędnych wektorów $\vec{u}$ i $L(\vec{u})$ w tych bazach. Wówczas*

$$y = Ax.$$

*Uwaga* 5. Składaniu przekształceń liniowych odpowiada mnożenie ich macierzy. Dokładniej jeśli $A$ jest macierzą przekształcenia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $B$ jest macierzą przekształcenia $K : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, to $B \cdot A$ jest macierzą złożenia $K \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

### Przykłady macierzy przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^2$

- Symetrie względem osi $Ox$ i $Oy$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Symetria względem $(0,0)$: $-J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- Jednokładność o środku $(0,0)$ i skali $k$: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$;
- Powinowactwo o osi $Ox$, kierunku $Oy$ i skali $k$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$;
- Symetria względem prostej $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Obrót o kąt $\alpha$ wokół początku układu współrzędnych: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.
- Rzuty prostokątne na osie $Ox$ i $Oy$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Jądro i obraz przekształcenia liniowego**

**Def. 3.** *Jądrem* przekształcenia liniowego $L: U \to V$ nazywamy zbiór $\mathrm{Ker}L$ określony wzorem:

$$\mathrm{Ker}L = \{\vec{u} \in U : L(\vec{u}) = \vec{0}\}.$$

**Def. 4.** *Obrazem* przekształcenia liniowego $L: U \to V$ nazywamy zbiór $\mathrm{Im}L$ określony wzorem:

$$\mathrm{Im}L = \{L(\vec{u}) : \vec{u} \in U\},$$

czyli zbiór takich wektorów $\vec{v}$ przestrzeni $V$, które są obrazami wektorów przestrzeni $U$ w przekształceniu $L$.

**Twierdzenie 3.** *Jądro przekształcenia liniowego $L: U \to V$ jest podprzestrzenią przestrzeni $U$, a jego obraz podprzestrzenią przestrzeni $V$.*

**Def. 5.** *Przestrzenią zerową* (ang. *nullspace*) dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ nazywamy zbiór wszystkich takich wektorów $x \in \mathbb{R}^n$, że $Ax = 0$.

**Fakt 4.** *Dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ przekształcenie*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto Ax$$

*jest liniowe oraz:*

1. $\mathrm{Ker}L$ *jest przestrzenią zerową macierzy $A$,*
2. $\mathrm{Im}L$ *jest przestrzenią kolumn macierzy $A$.*

**Przykłady**

- Jądro obrotu wokół początku układu współrzędnych o dowolny kąt $\alpha$ składa się tylko z wektora zerowego, a jego obrazem jest cała płaszczyzna.
- Jądrem rzutu na $Ox$ w $\mathbb{R}^2$ jest $Oy$, czyli $lin\{[0,1]\}$, a obrazem $Ox$, czyli $lin\{[1,0]\}$.
- Dla przekształcenia $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \; [x,y,z] \mapsto [x,y,0]$ $\mathrm{Ker}L = lin\{[0,0,1]\}$, $\mathrm{Im}L = lin\{[1,0,0],[0,1,0]\}$ Jest to rzut na płaszczyznę $xOy$ w kierunku $Oz$.
- Dla przekształcenia $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \; [x,y,z] \mapsto x - y + z$; jądrem jest płaszczyzna o równaniu $x - y + z = 0$, a obrazem cała przestrzeń $\mathbb{R}$.
- Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń:
  1. $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \; [x,y] \mapsto [x+y, 2x-y, y]$;
  2. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \; [x,y,z] \mapsto [x+y-2z, 2x+3y+z, x-7z]$;
  3. $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4; \; [x,y,z] \mapsto [x+2y+3z, y+2z, -x+z, y+2z]$.

**Algorytm wyznaczania jądra i obrazu**

Jądro i bazę obrazu przekształcenia liniowego o macierzy $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ można znaleźć następująco metodą eliminacji Gaussa:

1. Tworzymy podwójną macierz $[\mathcal{I}_n|A^T]$.
2. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach podwójnej macierzy sprowadzamy $A^T$ do postaci schodkowej.
3. Niezerowe wiersze przekształconej macierzy $A^T$ tworzą bazę obrazu.
4. Wiersze przekształconej macierzy $\mathcal{I}_n$ stojące przed wierszami zerowymi przekształconej macierzy $A^T$ tworzą bazę jądra.

**Twierdzenie 5.** *Niech $L: U \to V$ będzie dowolnym przekształceniem liniowym przestrzeni $U$ w dowolną przestrzeń $V$. Wówczas wymiar przestrzeni $U$ jest równy sumie wymiarów jądra i obrazu przekształcenia $L$.*

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}L) + \dim(\mathrm{Im}L).$$

**Izomorfizmy liniowe**

**Def. 6.** Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $L : U \to V$ nazywamy *izomorfizmem.* Przestrzenie liniowe $U$ i $V$ nazywamy *izomorficznymi*, gdy istnieje izomorfizm $L: U \to V$.

**Wn. 1.** *Jeśli $L: U \to V$ jest izomorfizmem, to*

1. $\mathrm{Ker}L = \{\vec{0}\}$, *gdzie $\vec{0}$ jest wektorem zerowym przestrzeni $U$;*
2. $\mathrm{Im}L = V$*;*
3. $\dim U = \dim V$*;*
4. *Jeśli $U$ i $V$ są skończenie wymiarowe, to macierz przekształcenia $L$ w dowolnych bazach jest nieosobliwa.*

*Przykład* 1. Przestrzeń liniowa $\mathbf{M}_{m\times n}$ jest izomorficzna z przestrzenią wektorową $\mathbb{R}^{m\cdot n}$.

**Endomorfizmy i automorfizmy liniowe**

**Def. 7.**

1. Dowolne przekształcenie liniowe $L: V \to V$ przestrzeni liniowej w siebie nazywamy *endomorfizmem.*
2. Dowolny endomorfizm, który jest izomorfizmem (czyli przekształceniem wzajemnie jednoznacznym) nazywamy *automorfizmem liniowym.*

**Wn. 2.** *Macierz endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest macierzą kwadratową stopnia $n$.*

**Wn. 3.** *Macierz dowolnego automorfizmu liniowego $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest nieosobliwa,* $\mathrm{Ker}L = \{\vec{0}\}$, $\dim(\mathrm{Im}L) = n$.

**Podprzestrzenie niezmiennicze ednomorfizmów**

**Def. 8.** 1. Podprzestrzeń $W$ przestrzeni $V$ nazywamy podprzestrzenią *niezmienniczą endomorfizmu* $L$ przestrzeni $V$, gdy

$$L(W) \subset W.$$

2. Liczbę $\lambda$ nazywamy *wartością własną endomorfizmu* $L$, gdy istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in V$ taki, że

$$L(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

3. Każdy niezerowy wektor $\vec{v}$ spełniający powyższą równość nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej* $\lambda$.

**Przykłady**

1. Rzut na $Ox$ ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$. Wartości własnej $\lambda_1$ odpowiadają wektory własne z $lin\{[1,0]\}$, a wartości własnej $\lambda_2$ wektory z $lin\{[0,1]\}$.
2. Symetria względem $Ox$ ma wartości własne $1, -1$. Wartości własnej 1 odpowiadają wektory własne z $lin\{[1,0]\}$, a wartości własnej $-1$ wektory z $lin\{[0,1]\}$.
3. Symetria względem prostej $y = x$ ma te same wartości własne, co symetria względem $Ox$, ale odpowiadają im wektory własne $[1,1]$ i $[1,-1]$.
4. Powinowactwo o osi $Ox$, kierunku $Oy$ i skali $k$ ma wartości własne 1 i $k$. Odpowiadają im wektory własne $[1,0]$ i $[0,1]$.
5. Jednokładność o skali $k$ ma podwójną wartość własną $k$. Każdy niezerowy wektor płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest jej wektorem własnym.
6. Obrót o kąt $\alpha \neq 0, \pi$ nie ma wartości i wektorów własnych.
7. Rzut na $xOy$ w kierunku $Oz$ ma podwójną wartość własną 1 i wartość własną 0.

**Twierdzenie 6.** *1. Zbiór $W_\lambda := \{\vec{v} \in V : \ L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$ wszystkich wektorów własnych endomorfizmu $L$ odpowiadających ustalonej wartości własnej $\lambda$ jest podprzestrzenią niezmienniczą.*

*2. Jeśli $A$ jest macierzą endomorfizmu $L$, to $\lambda$ jest jego wartością własną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0;$$

*3. $W_\lambda$ jest przestrzenią zerową macierzy $A - \lambda\mathcal{I}$.*

**Def. 9.** Wielomian $w(\lambda) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu $L$, równanie $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$ jego *równaniem charakterystycznym.*

*Uwaga* 6. Pojęcia równania charakterystycznego oraz wartości i wektorów własnych przenosimy z endomorfizmów na macierze.

- Równanie $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$ nazywamy *równaniem charakterystycznym macierzy $A$.*
- Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy $A$ nazywamy jej *wartościami własnymi.*
- Dowolny niezerowy wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ spełniający równanie $Ax = \lambda x$ nazywamy *wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej* $\lambda$.

**Def. 10.** Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy nazywamy jej *widmem* (*spektrum*).

**Twierdzenie 7.** *1. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

*2. Jeżeli endomorfizm liniowy $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma $n$ różnych wartości własnych, to odpowiadające im wektory własne tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$.*

*3. Macierz endomorfizmu liniowego w bazie jej wektorów własnych ma postać diagonalną:*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

*gdzie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ są wartościami własnymi, którym odpowiadają kolejne wektory bazy wektorów własnych.*

**Zastosowanie iloczynu wektorowego do wyznaczania wektorów własnych**

Jeśli macierz kwadratowa $A$ stopnia 3 ma jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą $W_\lambda$, to macierz $A-\lambda I$ ma rząd równy 2 i po wykreśleniu jednego z wierszy redukuje się do postaci $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$. Wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda$ można wtedy wyznaczyć ze wzoru: $\left[ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]^T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, gdzie $i, j, k$ są wektorami bazy kanonicznej.

*Uwaga* 7. Tak określony wektor nazywa się *iloczynem wektorowym* wektorów $a = [a_1, a_2, a_3]^T$ i $b = [b_1, b_2, b_3]^T$.

**Przykłady**

1. Wyznaczyć wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych podanych endomorfizmów:

   a) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad [x, y] \mapsto [x + y, y]$. Przekształcenie to nazywamy *ścięciem* o osi $Ox$.

   b) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad [x, y, z] \mapsto [2x + 3y + z, y + z, 2z]$.

2. Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy:

   a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

   b) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ (taką macierz nazywamy *klatką Jordana*).

**Zmiana bazy**

*Przykład* 2. Wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ zapisać jako kombinację wektorów $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, czyli znaleźć taki wektor $x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$, że $x = x'_1 b_1 + x'_2 b_2 + x'_3 b_3$.

**Def. 11.** *Macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy* $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy macierz, której kolumnami są współrzędne w bazie kanonicznej kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}$.

*Uwaga* 8. W Def.11 bazę kanoniczną można zastąpić dowolną inną bazą.

*Uwaga* 9. Macierz przejścia z bazy kanonicznej do bazy $\mathcal{B}$ jest macierzą w bazie kanonicznej automorfizmu liniowego przeprowadzającego bazę kanoniczną w bazę $\mathcal{B}$.

**Twierdzenie 8.** *Jeśli $P$ jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy $\mathcal{B}$, a* $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ *wektorami współrzędnych dowolnego wektora w* *bazie kanonicznej i odpowiednio w bazie $\mathcal{B}$, to*

$$x' = P^{-1}x \qquad (x = Px').$$

**Twierdzenie 9.** *Jeżeli $P$ jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy $\mathcal{B}$, $A$ macierzą endomorfizmu $L$ w bazie kanonicznej, a $A'$ jego macierzą w bazie $\mathcal{B}$, to $A' = P^{-1}AP$.*

**Def. 12** (Macierze podobne)**.** Niech $A, B$ będą macierzami kwadratowymi stopnia $n$. Mówimy, że macierz $B$ jest podobna do macierzy $A$, gdy istnieje macierz nieosobliwa $P$ taka, że $B = P^{-1}AP$.

**Fakt 10.** *Relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności.*

**Wn. 4.** *Macierze $A$, $A'$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tego samego endomorfizmu w pewnych bazach.*

**Fakt 11.** *Macierze podobne mają te same wyznaczniki, równania charakterystyczne i wartości własne.*

### Macierze diagonalizowalne, rozkład $A = P\Lambda P^{-1}$

**Def. 13.** Macierz podobną do macierzy diagonalnej nazywamy macierzą *diagonalizowalną*.

**Twierdzenie 12.** *Macierz kwadratowa jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma bazę wektorów własnych.*

**Wn. 5.** *Macierz która ma bazę wektorów własnych ma rozkład*

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

*gdzie $P$ jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych, a $\Lambda$ jest macierzą diagonalną, której przekątną tworzą wartości własne macierzy $A$, brane w tej samej kolejności, co odpowiadające im wektory własne, czyli kolumny macierzy $P$.*

*Przykłady:* 1. 1. Wyznaczyć współrzędne wektora $[5, 7]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[2, 1], [3, 2]\}$,

wyznaczyć macierz powinowactwa $L : [x, y] \mapsto [x, 2y]$ w tej bazie. Czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna?

2. Sprawdzić, czy macierz ścięcia $L : [x, y] \mapsto [x, x+y]$ jest diagonalizowalna.

3. Endomorfizm liniowy ma w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   Wyznaczyć jego macierz w bazie $\{[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]\}$.

4. Wyznaczyć rozkład $A = P\Lambda P^{-1}$ dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

**Ślad macierzy**

**Def. 14.** *Śladem* macierzy kwadratowej nazywamy sumę jej wyrazów głównej przekątnej. Ślad macierzy $A$ oznaczamy $\mathrm{tr}(A)$. Stosuje się też oznaczenia $\mathrm{Tr}(A)$ i $\mathrm{trace}(A)$.

**Twierdzenie 13.**

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;
2. $\mathrm{tr}(rA) = r\mathrm{tr}(A)$;
3. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

**Wn. 6.**

1. *Macierze podobne mają jednakowe ślady.*
2. *Ślad macierzy diagonalizowalnej jest sumą jej wartości własnych (branych z krotnościami).*

**Potęga macierzy diagonalizowalnej**

**Twierdzenie 14.** *Niech $A$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n$ o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ i odpowiadających im wektorach własnych $v_1, v_2, ..., v_n$, które tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:*

$$A^k = S \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot S^{-1},$$

*gdzie $S$ jest macierzą przejścia z bazy kanonicznej do bazy wektorów własnych.*

*Przykład* 3. Obliczyć: $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}^{21}$.