

Metody algebry liniowej. Lista 6. Metoda najmniejszych kwadratów. Macierze ortogonalne i symetryczne. Rozkłady Choleskiego i SVD.

1. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć najlepsze przybliżone rozwiązania danych układów równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

W a) sprawdzić, że dla najlepszego rozwiązania $\bar{x}$ wektor $A\bar{x}$ jest rzutem ortogonalnym kolumny wyrazów wolnych na przestrzeń kolumn macierzy układu.

2. Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczyć równania prostych regresji dla danych zbiorów punktów: a) $(-3, 1), (2, 1), (2, 3)$. b) $(-3, 0), (-1, 2), (1, 1), (3, 2)$.

3. Sprawdzić, że przekształcenie płaszczyzny E^2 o macierzy: a) $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ jest obrotem;

b) $B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ jest symetrią względem prostej. Wyznaczyć kąt obrotu i oś symetrii.

4. Sprawdzić, że przekształcenie przestrzeni E^3 o macierzy: a) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ jest obrotem;

b) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ jest symetrią względem płaszczyzny. W a) wyznaczyć oś i kąt obrotu, w b) równanie płaszczyzny symetrii.

5. Wyznaczyć rozkłady $A = Q\Lambda Q^T$ dla danych macierzy A :

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W podpunktach a), d) wyznaczyć rozkłady spektralne.

6. Wyznaczyć macierz symetryczną mając jej widmo i wektory własne:

$$\text{a) } \{5, 10\}, v_5 = [1, 2]^T, v_{10} = [-2, 1]^T; \quad \text{b) } \{9, 6, 4\}, v_9 = [1, 1, 1]^T, v_6 = [1, -2, 1]^T, v_4 = [1, 0, -1]^T.$$

7. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć ślady i widma macierzy $A \cdot A^T$ i $A^T \cdot A$. Która z tych macierzy jest dodatnio określona, a która dodatnio półokreślona?

8. Sprawdzić, które z macierzy symetrycznych są dodatnio określone:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Wyznaczyć rozkłady Choleskiego danych macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 34 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

10. Wyznaczyć rozkłady SVD danych macierzy A i ich rozkłady $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$. W podpunkcie b) również

zredukowany rozkład SVD: a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.

11. Dla uśrednionych danych zapisanych w macierzy $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ wyznaczyć macierz kowariancji, wartości osobliwe i pierwsze wektory osobliwe u_1, v_1 rozkładu SVD macierzy A^T . Znaleźć najbliższą danych podprzestrzeń jednowymiarową i rzuty danych na tę podprzestrzeń.