Metody algebry liniowej. Lista 6. Metoda najmniejszych kwadratów. Macierze ortogonalne i symetryczne. Rozkłady Choleskiego i SVD.

1. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć najlepsze przybliżone rozwiązania danych układów równań:
a) $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$; b) $\left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=1 \\ x+z=1 \\ x-y=1 \end{array} \right.$.
W a) sprawdzić, że dla najlepszego rozwiązania $\overline{x}$ wektor $A\overline{x}$ jest rzutem ortogonalnym kolumny wyrazów wolnych na przestrzeń kolumn macierzy układu.

2. Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyznaczyć równania prostych regresji dla danych zbiorów punktów: a) $(-3,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$. b) $(-3,0)$, $(-1,2)$, $(1,1)$, $(3,2)$.

3. Sprawdzić, że przekształcenie płaszczyzny E^2 o macierzy: a) $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ jest obrotem;
b) $B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ jest symetrią względem prostej. Wyznaczyć kąt obrotu i oś symetrii.

4. Sprawdzić, że przekształcenie przestrzeni E^3 o macierzy: a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ jest obrotem;
b) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ jest symetrią względem płaszczyzny. W a) wyznaczyć oś i kąt obrotu, w b) równanie płaszczyzny symetrii.

5. Wyznaczyć rokłady $A = Q\Lambda Q^T$ dla danych macierzy A:
a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
W podpunktach a), d) wyznaczyć rozkłady spektralne.

6. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć ślady i widma macierzy $A \cdot A^T$ i $A^T \cdot A$. Która z tych macierzy jest dodatnio określona, a która dodatnio półokreślona?

7. Sprawdzić, które z macierzy symetrycznych są dodatnio określone:
a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Wyznaczyć rozkłady Choleskiego danych macierzy:
a) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 34 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

9. Wyznaczyć rozkłady SVD danych macierzy A i ich rozkłady $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$. W podpunkcie b) również zredukowany rozkład SVD: a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.

10. Dla uśrednionych danych zapisanych w macierzy $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ wyznaczyć macierz kowariancji, wartości osobliwe i pierwsze wektory osobliwe u_1, v_1 rozkładu SVD macierzy A^T. Znaleźć najbliższą danych podprzestrzeń jednowymiarową i rzuty danych na tę podprzestrzeń.