Metody algebry liniowej. Lista 5. Macierze podobne, przestrzenie euklidesowe.

1. Wyznaczyć zespolone wartości i wektory własne macierzy: a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ wyznaczyć ślady macierzy AB i BA.

3. Wykazać, że relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności.

4. Sprawdzić, czy dane dwie macierze są podobne:
   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
   d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Korzystając z rozkładu $A = S\Lambda S^{-1}$ wyznaczyć przybliżenie macierzy A^{10} dla $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$

6. Wyznaczyć cosinusy kątów pomiędzy danymi wektorami:
   a) $a = [2, 2, 1]^T$, $b = [2, -1, 2]^T$, b) $a = [1, 2, 3, 4]^T$, $b = [4, 3, 2, 1]^T$.

7. Korzystając z definicji iloczynu skalarnego, normy i kąta pomiędzy wektorami w dowolnej przestrzeni euklidesowej wykazać, że:
   (a) Jeśli $x \perp y$, to $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (twierdzenie Pitagorasa).
   (b) Dla dowolnych wektorów x, y: $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x|| \cdot ||y|| \cos\alpha$, gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami x, y (twierdzenie cosinusów).

8. Wyznaczyć dopelnienia ortogonalne przestrzeni wierszy danych macierzy:
   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

9. Obliczyć: a) $[4, 2, 3]^T \times [1, 2, 4]^T$, b) $[2, 3, 3]^T \times [2, 5, 4]^T + [2, 1, 2]^T \times [2, 3, 3]^T$, c) $([1, 1, 2]^T, ([1, 1, 4]^T \times [3, -1, 2]^T))$.

10. Wskazać bazę ortogonalną przestrzeni E^3 zawierającą dany wektor v: a) $v = [1, 2, 3]^T$; b) $v = [3, 4, 5]^T$.

11. Wyznaczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach u, v oraz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach u, v, w, gdzie $u^T = [4, -1, 1]$, $v^T = [0, 1, -2]$ i $w^T = [4, 1, 2]$.

12. Znaleźć macierze rzutów π_u dla danych wektorów u oraz rzuty ortogonalne na $lin\{u\}$ wektorów x i y:
    a) $u = [1, 2, 1]^T$, $x = [2, 1, 2]^T$, $y = [3, -2, 1]^T$; b) $u = [1, -1, 1, 1]^T$, $x = [4, 1, 2, 3]^T$, $y = [3, 2, -4, 3]^T$.

13. Znaleźć macierz rzutu π_U dla $U = lin\{[1, 0, 1]^T, [1, 1, -1]^T\}$ i rzuty ortogonalne na U wektorów $x = [1, -1, 3]^T$, $y = [-1, 2, 1]^T$ i $v = [3, 3, 3]^T$. Jakie jest położenie tych wektorów względem płaszczyzny U?

14. Znaleźć macierz rzutu π_U dla $U = lin\{[1, 1, 0]^T, [0, 1, 1]^T\}$.

15. Sprawdzić, czy macierz $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą rzutu na $lin\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

16. Zortogonalizować metodą Grama-Schmidta dane układy wektorów:
    a) $[1, 1, 1]^T, [1, 4, 4]^T$; b) $[1, 1, -1, 0]^T, [3, 2, -1, 1]^T, [1, 1, 1, 1]^T$.

17. Wskazać bazy ortonormalne danych podprzestrzeni przestrzeni E^3 i E^4:
    a) $lin\{[1, 2, 2]^T, [4, 2, 5]^T\}$; b) $lin\{[1, 1, 0, 1]^T, [2, -1, 0, 2]^T, [1, 1, 1, 2]^T\}$.