

Metody algebry liniowej. Lista 3. Układy równań liniowych, wyznaczniki.

1. Określić ilość rozwiązań układu równań mając dane: ilość niewiadomych n , rząd macierzy układu rA i rząd macierzy uzupełnionej rU . W przypadku nieskończonych zbiorów rozwiązań określić od ilu parametrów one zależą.

a) $n = 4, rA = rU = 2$; b) $n = 5, rA = 2, rU = 3$; c) $n = 7 = rA = rU$; d) $n = 8, rA = rU = 7$.

2. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gaussa:

a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + z = 8 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 3z = 1 \end{cases};$$

d)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}; \quad \text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ wyznaczyć bazy i wymiary przestrzeni jej wierszy i rozwiązań układu jednorodnego $Ax = 0$.

4. Obliczyć podane wyznaczniki (w dwóch ostatnich wyciągnąć stałe przed wyznaczniki):

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -14 & 7 & 21 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \\ 8 & -16 & 6 \end{vmatrix}$.

5. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

6. Korzystając z własności wyznacznika uprościć i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & 2 & 1 \\ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Stosując metodę eliminacji Gaussa lub inne operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$.

9. Zbadać ilość rozwiązań układów równań w zależności od parametru p :

a) $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$.

10. Obliczyć dzieląc macierz na bloki (w c) i d) najpierw stosownie przekształcić):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 9 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$11. \text{ Rozwiązać równania: a) } \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & x & 3 & 5 \\ 1 & 2 & x & 5 \\ 2 & 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Obliczyć wyznaczniki macierzy we wskazanych ciałach:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2+i & 3+2i \\ 2+3i & 1+2i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+3i & 4+3i \\ -(4-3i) & 1-3i \end{vmatrix} \text{ w } \mathbb{C}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \text{ w } \mathbb{Z}_5; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ w } \mathbb{Z}_2.$$

13. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy metodą dopełnień algebraicznych:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

14. Rozwiązać równania macierzowe:

$$\text{a) } X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Dane są permutacje $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć:

$$\text{a) } \sigma\tau; \quad \text{b) } \tau\sigma; \quad \text{c) } \sigma^{-1}; \quad \text{d) } \sigma^2; \quad \text{e) } \tau^3.$$

16. Dane permutacje przedstawić w postaci iloczynów cykli rozłącznych i określić ich znaki.

$$\text{a) } \sigma, \tau \text{ z zad. 15}; \quad \text{b) } \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) obliczyć: } \sigma^8, \alpha^{12} \text{ i } \beta^{13}.$$

17. Dla wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}]$ stopnia 7 określić znaki jakie stoją przy podanych jego składnikach:

$$\text{a) } a_{13}a_{27}a_{32}a_{44}a_{56}a_{65}a_{71}; \quad \text{b) } a_{15}a_{23}a_{31}a_{46}a_{54}a_{62}a_{77}.$$

18. Wykazać, że permutacje parzyste z dowolnej grupy S_n tworzą podgrupę. Oznacza się ją A_n . Czy permutacje nieparzyste też są podgrupą?

19. Wypisać macierze permutacji P_σ i $P_{\sigma^{-1}}$ dla danych permutacji $\sigma \in S_4$:

$$\text{a) } (1, 3, 4); \quad \text{b) } (1, 4, 3, 2); \quad \text{c) } (1, 3)(4, 2).$$

$$20. \text{ Znaleźć taką } \sigma \in S_3, \text{ że } P_\sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ jest trójkątna górna.}$$

21. Wyznaczyć początkowe minory główne M_1, M_2, M_3 macierzy A . Czy ma ona rozkład $A = LU$ (gdzie L jest trójkątna dolna, a U trójkątna górna). Znaleźć taką macierz permutacji P_σ i macierze trójkątne L, U ,

$$\text{że } P_\sigma A = LU. \quad \text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$