# Metody algebry liniowej. Lista 3. Układy równań liniowych, wyznaczniki.

1. Określić ilość rozwiązań układu równań mając dane: ilość niewiadomych $n$, rząd macierzy układu $rA$ i rząd macierzy uzupełnionej $rU$. W przypadku nieskończonych zbiorów rozwiązań określić od ilu parametrów one zależą.

   a) $n = 5$, $rA = rU = 4$; b) $n = 4$, $rA = 2$, $rU = 3$; c) $n = 6 = rA = rU$; d) $n = 5$, $rA = rU = 3$.

2. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gausa:

   a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + z = 8 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 3z = 1 \end{cases}$;

   d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$.

3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ wyznaczyć bazy i wymiary przestrzeni jej wierszy i rozwiązań układu jednorodnego $Ax = 0$.

4. Obliczyć podane wyznaczniki ( w dwóch ostatnich wyciągnąć stałe przed wyznaczniki):

   a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -14 & 7 & 21 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \\ 8 & -16 & 6 \end{vmatrix}$.

5. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

   a) $\begin{vmatrix} 17 & 17 & 17 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

6. Korzystając z własności wyznacznika uprościć i obliczyć:

   a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3} & 2 & 1 \\ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Stosując metodę eliminacji Gaussa lub inne operacje elementarne na wierszach lub kolumnach uprościć i obliczyć:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

8. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

   a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 3y - z = 5 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$.

9. Zbadać ilość rozwiązań układów równani w zależności od parametru $p$:

   a) $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$.

10. Obliczyć dzieląc macierz na bloki (w c), d) i e) najpierw stosownie przekształcić):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

11. Rozwiązać równania: a) $\begin{vmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 2 & 4 & x & 8 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$.

12. Obliczyć wyznaczniki macierzy we wskazanych ciałach:

a) $\begin{vmatrix} 2+i & 3+2i \\ 2+3i & 1+2i \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1+3i & 4+3i \\ -(4-3i) & 1-3i \end{vmatrix}$ w $\mathbb{C}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, w $Z_3$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, w $Z_2$.

13. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy metodą dopełnień algebraicznych:
a) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

14. Rozwiązać równania macierzowe:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;
c) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; d) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Dane są permutacje $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć:

a) $\sigma\tau$; b) $\tau\sigma$; c) $\sigma^{-1}$; d) $\sigma^2$; e) $\tau^3$.

16. Dane permutacje przedstawić w postaci iloczynów cykli rozłącznych i określić ich znaki.
a) $\sigma$, $\tau$ z zad. 15; b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 9 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$;
d) obliczyć: $\sigma^8$, $\alpha^{12}$ i $\beta^{13}$.

17. Dla wyznacznika macierzy $A = [a_{i,j}]$ stopnia 7 określić znaki jakie stoją przy podanych jego składnikach:

a) $a_{13}a_{27}a_{32}a_{44}a_{56}a_{65}a_{71}$; b) $a_{15}a_{23}a_{31}a_{46}a_{54}a_{62}a_{77}$.

18. Wykazać, że permutacje parzyste z dowolnej grupy $S_n$ tworzą podgrupę. Oznacza się ją $A_n$. Czy permutacje nieparzyste też są podgrupą?

19. Wypisać macierze permutacji $P_\sigma$ i $P_{\sigma^{-1}}$ dla danych permutacji $\sigma \in S_4$:

a) $(1,3,4)$; b) $(1,4,3,2)$; c) $(1,3)(4,2)$.

20. Znaleźć taką $\sigma \in S_3$, że $P_\sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ jest trójkątna górna.

21. Wyznaczyć początkowe minory główne $M_1, M_2, M_3$ macierzy $A$. Czy ma ona rozkład $A = LU$ (gdzie $L$ jest trójkątna dolna, a $U$ trójkątna górna). Znaleźć taką macierz permutacji $P_\sigma$ i macierze trójkątne $L, U$, że $P_\sigma A = LU$. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.