Metody algebry liniowej. Lista 2. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$, macierze.

1. Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:

   a) $4 \cdot [2,1,-3] + 2 \cdot [-1,4,1]$; b) $2 \cdot [5,2,-1,3] - 3 \cdot [3,3,1,2]$; c) $2 \cdot [1,2,-1] + 4 \cdot [1,1,1] - [6,8,2]$.

2. Wektor $\vec{v}$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{x} = [1,0,0]$, $\vec{y} = [1,1,0]$ i $\vec{z} = [1,1,1]$:

   a) $\vec{v} = [4,3,2]$ b) $\vec{v} = [3,2,-1]$; c) $\vec{v} = [1,5,4]$.

3. Sprawdzić, które ze zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 1\}$, (b) $W_2 = \{[x_1,x_2,x_1+x_2] : \ x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$, (c) $W_3 = \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_3 = 0\}$, (d) $W_4 = \{[x_1,x_2,x_3] \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 \cdot x_3 = 0\}$, (e) $W_5 = \{[t,2t,3t] : t \in \mathbb{R}\}$.

4. Sprawdzić, czy dane wektory są liniowo zależne:

   a) $[1,2,1],[0,2,3],[0,0,3]$; b) $[1,3,1,3],[3,1,3,1],[1,1,1,1]$ c) $[1,1,2],[1,1,3],[1,1,5]$;
   d) $[1,1,1],[1,2,3],[3,3,3]$; e) $[1,2,1,0],[5,7,9,3],[1,2,3,4]$; f) $[1,1,1,1],[2,3,4,5],[2,4,6,8]$.

5. Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą:

   a) $([1,2,3],[3,5,1],[5,8,-1])$; b) $([1,1,1,2],[1,1,2,1],[1,2,1,1],[2,1,1,1])$.

6. Wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i wskazać ich przykładowe bazy:

   a) $lin\{[1,2,3],[1,1,2],[1,3,4]\}$; b) $lin\{[1,1,1,1],[2,1,3,2],[3,4,-1,5],[4,4,1,6]\}$;
   c) $lin\{[1,1,2,1],[1,2,1,1],[2,1,5,2],[2,3,3,2]\}$; d) podprzestrzeni z zadania 3.

7. Sprawdzić, czy $W_1 = lin\{[1,-1,1,1],[1,1,1,-1] \subset W_2 = lin\{[1,1,1,1],[0,1,1,1],[0,0,1,1]\}$.

8. Sprawdzić, czy $lin\{[1,1,1],[1,2,3]\} = lin\{[0,1,2],[1,0,-1]\}$.

9. Dla danych podprzestrzeni U i W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni $U+W$ i $U \cap V$:

   (a) $U = lin\{[1,1,1,0],[2,1,3,1],[1,2,0,2]\}$, $W = lin\{[1,0,1,1],[2,1,1,2],[3,2,1,3]\}$;
   (b) $U = \{[1,2,2,3],[0,1,1,2],[3,2,2,1]\}$, $W = lin\{[1,3,1,2],[0,2,0,1],[2,4,2,3]\}$.

10. Wyznaczyć rzędy macierzy. Wskazać przykładowe bazy ich przestrzeni wierszy:

    a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

11. Wyznaczyć zredukowane postacie schodkowe danych macierzy i ich rzędy:

    a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

12. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

    a) $[1,2,3,4] \circ [2,1,3,-2]$; b) $[3,-3,2] \circ [3,4,1] + [-2,1,3] \circ [3,4,1]$ c) $\sqrt{[2,1,2] \circ [2,1,2]}$.

13. Obliczyć mnożąc wiersze przez kolumny:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;
    d) $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$;
    f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 11 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

14. Obliczyć mnożąc kolumny przez wiersze i zapisując iloczyny w postaci sum macierzy rzędu 1:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ rozstrzygnąć, które działania są wykonalne i wykonać te, które można:

a) $A \cdot B$; b) $B \cdot A$; c) $A^T \cdot B^T$; d) $B^T \cdot A^T$; e) $A \cdot A^T$ f) $B \cdot B^T$; g) $B^T \cdot B$; h) A^2; i) B^2.

16. Wykazać, że jeśli A i B są symetryczne, to $(AB)^T = BA$. Znaleźć takie macierze symetryczne A i B (stopnia 2), że $AB \neq BA$.

17. Wykonać działania na macierzach we wskazanych ciałach: a) $\begin{bmatrix} 1+i & 2+i \\ i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i & 1-i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$ w $\mathbb{C}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ w Z_5; c) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ w Z_7; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{23}$ w Z_2.

18. Wykazać, że jeśli $AB = \mathcal{I}$ i $CA = \mathcal{I}$, to $B = C = A^{-1}$.

19. Wyznaczyć macierze X z danych równań macierzowych: a) $XA + B = C$; b) $AX + B = CX + D$; c) $XA = X + B$; d) $XAB = C$; e) $AXA^{-1} = B$; f) $ABCX = D$.

20. Wyznaczyć rozkłady $A = CR$ danych macierzy A, (gdzie C tworzą niezależne kolumny A, a R jest zredukowaną macierzą schodkową):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Wypisać macierze elementarne $E_{31}(2)$, $E_3(2)$, E_{13} stopnia 3.

(a) Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ wyznaczyć iloczyny $E_{31}(2) \cdot A$, $E_3(2) \cdot A$, $E_{13} \cdot A$

(b) Dla macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ wyznaczyć iloczyny $B \cdot (E_{31}(2))^T$, $B \cdot (E_3(2))^T$, $B \cdot E_{13}^T$.

22. Znaleźć taką elementarną macierz E, że $U = EA$ jest macierzą trójkątną górną dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Zapisać A w postaci $E^{-1}U$.

23. Dla macierzy elementarnych stopnia 3 wyznaczyć $(E_{32}(-2) \cdot E_{31}(-3) \cdot E_{21}(-1))^{-1}$.

24. Wyznaczyć rozkłady $A = LU$ dla danych macierzy A (L jest trójkątna dolna, a U trójkątna górna):

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$;

25. Metodą eliminacji Gaussa wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy A:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;