Metody algebry liniowej. Lista 2. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$, macierze.

1. Wyznaczyć następujące kombinacje liniowe wektorów:

   a) $4 \cdot [2, 1, -3] + 2 \cdot [-1, 4, 1]$; b) $2 \cdot [5, 2, -1, 3] - 3 \cdot [3, 3, 1, 2]$; c) $2 \cdot [1, 2, -1] + 4 \cdot [1, 1, 1] - [6, 8, 2]$.

2. Wektor $\vec{v}$ zapisać jako kombinację wektorów $\vec{x} = [1, 0, 0]$, $\vec{y} = [1, 1, 0]$ i $\vec{z} = [1, 1, 1]$:

   a) $\vec{v} = [4, 3, 2]$ b) $\vec{v} = [3, 2, -1]$; c) $\vec{v} = [1, 5, 4]$.

3. Sprawdzić, które ze zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1\}$, (b) $W_2 = \{[x_1, x_2, x_1 + x_2] : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, (c) $W_3 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$, (d) $W_4 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 \cdot x_3 = 0\}$, (e) $W_5 = \{[t, 2t, 3t] : t \in \mathbb{R}\}$.

4. Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

   a) $[1, 2, 1], [0, 2, 3], [0, 0, 3]$; b) $[1, 3, 1, 3], [3, 1, 3, 1], [1, 1, 1, 1]$ c) $[1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 5]$;
   d) $[1, 1, 1], [1, 2, 3], [3, 3, 3]$; e) $[1, 2, 1, 0], [5, 7, 9, 3], [1, 2, 3, 4]$; f) $[1, 1, 1, 1], [2, 3, 4, 5], [2, 4, 6, 8]$.

5. Sprawdzić, które z układów wektorów są bazami przestrzeni $\mathbb{R}^n$, do której należą:

   a) $([1, 2, 3], [3, 5, 1], [5, 8, -1])$; b) $([1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1])$.

6. Wyznaczyć wymiary danych podprzestrzeni odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i wskazać ich przykładowe bazy:

   a) $lin\{[1, 2, 3], [1, 1, 2], [1, 3, 4]\}$; b) $lin\{[1, 1, 1, 1], [2, 1, 3, 2], [3, 4, -1, 5], [4, 4, 1, 6]\}$;
   c) $lin\{[1, 1, 2, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 1, 5, 2], [2, 3, 3, 2]\}$; d) podprzestrzeni z zadania 3.

7. Sprawdzić, czy $W_1 = lin\{[1, -1, 1, 1], [1, 1, 1, -1] \subset W_2 = lin\{[1, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 1], [0, 0, 1, 1]\}$.

8. Sprawdzić, czy $lin\{[1, 1, 1], [1, 2, 3]\} = lin\{[0, 1, 2], [1, 0, -1]\}$.

9. Dla danych podprzestrzeni U i W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wyznaczyć wymiary podprzestrzeni $U + W$ i $U \cap V$:

   (a) $U = lin\{[1, 1, 1, 0], [2, 1, 3, 1, [1, 2, 0, 2], W = lin\{[1, 0, 1, 1], [2, 1, 1, 2], [3, 2, 1, 3]\}$;
   (b) $U = \{[1, 1, 1, 1], [1, 2, 3, 4], [2, 3, 1, 1]\}, W = lin\{[1, 1, 1, 1], [2, 1, 3, 2], [3, 1, 5, 3]\}$.

10. Wyznaczyć rzędy macierzy. Wskazać przykładowe bazy ich przestrzeni wierszy i przestrzeni kolumn:

    a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

11. Wyznaczyć zredukowane postaci schodkowe danych macierzy i ich rzędy:

    a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

12. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

    a) $[1, 2, 3, 4] \circ [2, 1, 3, -2]$; b) $[3, -3, 2] \circ [3, 4, 1] + [-2, 1, 3] \circ [3, 4, 1]$ c) $\sqrt{[2, 1, 2] \circ [2, 1, 2]}$.

13. Obliczyć mnożąc wiersze przez kolumny:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

    d) $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)$;

    f) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 11 & -4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ -6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

14. Obliczyć mnożąc kolumny przez wiersze i zapisując iloczyny w postaci sum macierzy rzędu 1:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ rozstrzygnąć, które działania są wykonalne i wykonać te, które można:

a) $A \cdot B$; b) $B \cdot A$; c) $A^T \cdot B^T$; d) $B^T \cdot A^T$; e) $A \cdot A^T$ f) $B \cdot B^T$; g) $B^T \cdot B$; h) A^2; i) B^2.

16. Wykazać, że jeśli A i B są symetryczne, to $(AB)^T = BA$. Znaleźć takie macierze symetryczne A i B (stopnia 2), że $AB \neq BA$.

17. Wykonać działania na macierzach we wskazanych ciałach: a) $\begin{bmatrix} 1+i & 2+i \\ i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+i & 1-i \\ 2-i & i \end{bmatrix}$ w $\mathbb{C}$;

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ w Z_5; c) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ w Z_7; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{23}$ w Z_2.

18. Wykazać, że jeśli $AB = \mathcal{I}$ i $CA = \mathcal{I}$, to $B = C = A^{-1}$.

19. Wyznaczyć macierze X z danych równań macierzowych: a) $XA + B = C$; b) $AX + B = CX + D$; c) $XA = X + B$; d) $XAB = C$; e) $AXA^{-1} = B$; f) $ABCX = D$.

20. Wyznaczyć rozkłady $A = CR$ danych macierzy A, (gdzie C tworzą niezależne kolumny A, a R jest zredukowaną macierzą schodkową):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

21. Wypisać macierze elementarne $E_{31}(2)$, $E_3(3)$, E_{13} stopnia 3.

(a) Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ wyznaczyć iloczyny $E_{31}(2) \cdot A$, $E_3(3) \cdot A$, $E_{13} \cdot A$

(b) Dla macierzy $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ wyznaczyć iloczyny $B \cdot (E_{31}(2))^T$, $B \cdot (E_3(3))^T$, $B \cdot E_{13}^T$.

22. Znaleźć taką elementarną macierz E, że $U = EA$ jest macierzą trójkątną górną dla $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

Zapisać A w postaci $E^{-1}U$.

23. Dla macierzy elementarnych stopnia 3 wyznaczyć $(E_{32}(-2) \cdot E_{31}(-3) \cdot E_{21}(-1))^{-1}$.

24. Wyznaczyć rozkłady $A = LU$ dla danych macierzy A (L jest trójkątna dolna, a U trójkątna górna):

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$;

25. Metodą eliminacji Gaussa wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy A:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;