

Metody algebry liniowej. Liczby zespolone, grupy, ciała Z_p

1. Obliczyć:

a) $(\frac{1}{5} - 3i)(5 + \frac{1}{3}i)$; b) $(1 + 3i)\overline{1 + 3i} + (1 + 3i)^2$; c) $(1 - i)^2(5 - \frac{1}{2}i)$; d) $(1 + 2i)^3$; e) $\frac{3 - 5i}{i}$;
f) $\frac{4 + 3i}{2 - i}$; g) $\frac{6 + 4i}{(1 - i)^2}$; h) $\frac{(3 + i)^2}{1 - i}$; i) $\frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^2}$; j) i^{71} ; k) $(1 - i)^{20}$.

2. Rozwiązać równania:

a) $z - 3 = iz - 5i$; b) $(1 + 3i)\bar{z} - 8 = i\bar{z} + 2$; c) $(1 + 2i)z + 3(z - i) = (2 + i)(z + i)$; d) $\frac{3 + i}{z - 1} = \frac{2 - i}{z - i}$;
e) $z^2 + 4z + 5 = 0$; f) $z^2 + z + 1 = 0$; g) $z^2 + iz + 2 = 0$; h) $z^3 + 1 = 0$; i) $z^4 - 81 = 0$;
j) $z^4 - 10z^2 + 9 = 0$; k) $z^3 + 5z^2 + 8z + 6 = 0$ l) $z^2 = 5 + 12i$; m) $z^2 + (4 + i)z + 4 + 2i = 0$.

Rozwiązania równań od e) do k) zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej.

3. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

a) $z + \bar{z} = 0$; b) $z - \bar{z} = 4i$; c) $z\bar{z} \leq 1$; d) $(2 + i)z + \overline{(2 + i)z} = 4$; e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; f) $|\operatorname{Re} z| \leq 2$;
g) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$; h) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$; i) $\operatorname{Re}[(1 + i)z] = 2$.

4. Zaznaczyć liczby na płaszczyźnie zespolonej i zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ b) $-3 + 3\sqrt{3}i$; c) $-4 - 4i$; d) $2\sqrt{3} - 2i$.

5. Zaznaczyć liczby na płaszczyźnie zespolonej i podać ich postać algebraiczną:

a) $2(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$ b) $\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi$ c) $2\sqrt{3}e^{\frac{7\pi}{6}i}$; d) $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$; e) $e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

6. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

a) $\left\{ \begin{array}{l} |z| \leq 4 \\ \frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{2\pi}{3} \end{array} \right.$; b) $\left\{ \begin{array}{l} |z + 2| = 2 \\ \operatorname{Arg} z \leq \frac{3\pi}{4} \end{array} \right.$; c) $\left\{ \begin{array}{l} |z - i| \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi \end{array} \right.$; d) $\left\{ \begin{array}{l} |z - 1 + i| < \sqrt{2} \\ \operatorname{Arg} z \geq \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$;
e) $\left\{ \begin{array}{l} |z| = |z - 4| \\ \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$; f) $\left\{ \begin{array}{l} |z| = |z - 2 + 2i| \\ |z| \leq 2 \end{array} \right.$.

7. Obliczyć (wynik przedstawić w postaci algebraicznej): a) $(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) \cdot (\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$;

b) $(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)^7$; c) $(e^{\frac{5\pi}{6}i})^8$; d) $\frac{(e^{\frac{\pi}{6}i})^{10}}{(e^{\frac{4\pi}{3}i})^4}$; e) $(1 - i\sqrt{3})^8$; f) $(-2\sqrt{3} + 2i)^5$; g) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{11}}{(1 - i)^{18}}$.

8. Wyznaczyć pierwiastki i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

a) $\sqrt[3]{8}$; b) $\sqrt[3]{-27i}$; c) $\sqrt[4]{-16}$; d) $\sqrt[6]{-1}$; e) $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$; f) $\sqrt[4]{(3 + 2i)^4}$.

9. Sprawdzić, które zbiory liczbowe są podgrupami grupy $(\mathbb{C}, +)$, a które $(\mathbb{C}^*, \cdot)$:

(a) Nieujemne liczby całkowite; (b) parzyste liczby całkowite; (c) liczby wymierne dodatnie;
(d) liczby rzeczywiste różne od zera; (e) liczby zespolone o module 1; (f) liczby czysto urojone
($\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$); (g) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z\}$; (h) pierwiastki czwartego stopnia z jedynki
($\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\}$); (i) $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ dla dowolnego naturalnego n .

10. Wyznaczyć elementy przeciwne i odwrotne do 4 w ciałach Z_5 , Z_7 , Z_{11} i Z_{13} . Czy 4 i 5 mają elementy przeciwne i odwrotne w zbiorze $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z działaniami modulo 6?

11. W ciele Z_7 rozwiązać równania:

a) $2x + 4 = 2 \pmod{7}$; b) $x^2 + x + 1 = 0 \pmod{7}$; c) $x^2 + x + 2 = 0 \pmod{7}$;
d) $x^2 + x + 3 = 0 \pmod{7}$.