

Metody algebry liniowej. Liczby zespolone, grupy, ciała Z_p

1. Obliczyć:

a) $(\frac{1}{3} - 2i)(3 + \frac{1}{2}i)$; b) $(1 + 2i)(3 - 2i) - (2 + i)^2$; c) $(5 + 2i)\overline{5 + 2i}$; d) $(1 + i)^2(3 - \frac{1}{2}i)$; e) $(2 + i)^3$;
f) $\frac{2 - 3i}{i}$; g) $\frac{2 + 3i}{2 - i}$; h) $\frac{4 + i}{(1 - i)^2}$; i) $\frac{(2 + 4i)^2}{1 - i}$; j) $\frac{(1 - i)^3}{(1 + i)^2}$; k) i^{51} ; l) $(1 + i)^{20}$.

2. Rozwiązać równania:

a) $z + 2 - 2i = iz + 6$; b) $(2 + 3i)\bar{z} - 8 = i\bar{z} - 4$; c) $(1 + 2i)z + 3(z - i) = (2 + i)z$; d) $\frac{3 + i}{z} = \frac{3 + 2i}{z - i}$;
e) $z^2 + 4z + 8 = 0$; f) $z^2 - z + 1 = 0$; g) $z^2 - iz + 2 = 0$; h) $z^3 - 1 = 0$; i) $z^4 - 256 = 0$;
j) $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$; k) $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$; l) $z^2 = 8 + 6i$; m) $z^2 + (2 + i)z + 1 + i = 0$.

Rozwiązania równań od e) do k) zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej.

3. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb spełniających warunki:

a) $z = -\bar{z}$; b) $z + \bar{z} = 4$; c) $z\bar{z} = 4$; d) $(1 - i)z + \overline{(1 - i)z} = 2$; e) $\operatorname{Re} z \leq 3$; f) $|\operatorname{Im} z| \leq 2$;
g) $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$; h) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$; i) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$; j) $\operatorname{Re}[(1 - i)\bar{z}] = 2$.

4. Zaznaczyć liczby na płaszczyźnie zespolonej i zapisać je w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $-1 + \sqrt{3}i$; c) $-2 - 2i$; d) $2\sqrt{3} - 2i$.

5. Zaznaczyć liczby na płaszczyźnie zespolonej i podać ich postać algebraiczną:

a) $4(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)$; b) $\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi$; c) $2e^{\frac{11\pi}{6}i}$; d) $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$; e) $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

6. Narysować zbiory liczb spełniających warunki: a) $\begin{cases} |z| = 4 \\ \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} |z - 2| \leq 2 \\ \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$;
c) $\begin{cases} |z + i| \geq 1 \\ \pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} |z + 1 - i| < \sqrt{2} \\ \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$; e) $\begin{cases} |z| = |z - 4i| \\ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$; f) $\begin{cases} |z - 2| = |z + 2i| \\ |z| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$.

7. Obliczyć (wynik przedstawić w postaci algebraicznej): a) $(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) \cdot (\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi)$;

b) $(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)^{13}$; c) $(e^{\frac{5\pi}{6}i})^8$; d) $\frac{(e^{\frac{\pi}{6}i})^{10}}{(e^{\frac{4\pi}{3}i})^4}$; e) $(1 - i\sqrt{3})^4$; f) $\frac{(2e^{\frac{\pi}{3}i})^7}{(-\sqrt{3} + i)^5}$; g) $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{10}}{(1 - i)^{18}}$.

8. Wyznaczyć pierwiastki i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{-8i}$; c) $\sqrt[4]{-81}$; d) $\sqrt[6]{-64}$; e) $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$; f) $\sqrt[4]{(1 + 2i)^4}$.

9. Sprawdzić, które zbiory liczbowe są podgrupami grupy $(\mathbb{C}, +)$, a które $(\mathbb{C}^*, \cdot)$:

a) Liczby całkowite podzielne przez 5, b) parzyste liczby naturalne, c) liczby rzeczywiste dodatnie, d) liczby wymierne różne od zera, e) liczby wymierne ujemne, f) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,
g) liczby czysto urojone ($\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$), h) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}$; i) pierwiastki szóstego stopnia z jedynki ($\{z \in \mathbb{C} : z^6 = 1\}$).

10. Wyznaczyć elementy przeciwne i odwrotne do 3 w ciałach Z_5 , Z_7 , Z_{11} i Z_{13} . Czy 3 i 5 mają elementy przeciwne i odwrotne w zbiorze $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z działaniami modulo 6?

11. W ciele Z_5 rozwiązać równania:

a) $4x + 2 = 3 \pmod{5}$; b) $x^2 + x + 3 = 0 \pmod{5}$; c) $x^2 + x + 4 = 0 \pmod{5}$;
d) $x^2 + x + 2 = 0 \pmod{5}$.