Metody algebry liniowej. Lista 4. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdzić, które z danych przekształceń są liniowe:
   a) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ [x,y]\mapsto[x-y,x+y]$; b) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ [x,y]\mapsto[|x|,y]$;
   c) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ [x,y]\mapsto[xy,x-y]$; d) symetria względem prostej $y=-x$ w $\mathbb{R}^2$;
   e) symetria względem prostej $x=1$ w $\mathbb{R}^2$;
   f) obrotu wokół początku układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{2}$ w $\mathbb{R}^2$;
   g) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto[t,-t,t^2]$; h) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto[t,-2t,3t]$;
   i) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ [x,y]\mapsto[x+y,x+2,y-x]$; j) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ [x,y]\mapsto[x-y,2x+y,y-2x]$;
   k) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ [x,y,z]\mapsto[x+2y-2z,-2x-4y+4z]$;
   l) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ [x,y,z]\mapsto[x+y+z,2x+3y+z,2x+y+3z]$.

2. Wypisać macierze przekształceń liniowych z zad.1 (w bazach kanonicznych).

3. Wyznaczyć jądra i obrazy przekształceń liniowych z zad.1 oraz przekształceń liniowych o danych macierzach w bazach kanonicznych (czyli bazy ich przestrzeni zerowych i przestrzeni kolumn):
   a) $\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&3&1&2\\2&1&3&0\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}1&2&3&3\\1&1&3&1\\1&2&4&2\\1&1&5&-1\end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix}1&1&2&2&0\\0&1&1&0&1\\2&2&4&3&1\\1&1&2&-1&3\end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix}2&1&4\\1&1&3\\1&2&5\\3&1&5\end{bmatrix}$.

4. Dowolna permutacja wektorów bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ determinuje automorfizm liniowy tej przestrzeni. Wyznaczyć macierze takich automorfizmów dla permutacji $\sigma=(1,2,3)$ i $\tau=(1,4)(2,3)$ wektorów bazowych przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jaki jest związek otrzymanych macierzy z macierzami permutacji P_σ i P_τ.

5. Sprawdzić, które z danych wektorów są wektorami własnymi macierzy $A=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&2\\4&-2&0\end{bmatrix}$:
   a) $u-[1,2,1]^T,\quad v=[1,2,0]^T,\quad w=[1,1,1]^T,\quad x=[1,1,2]^T$.

6. Które z liczb $1,2,3,4,5$ są wartościami własnymi macierzy A z zad. 5?

7. Wyznaczyć wartości własne, wektory własne i podprzestrzenie niezmiennicze podanych endomorfizmów. Tam, gdzie jest baza wektorów własnych podać macierz endomorfizmu w tej bazie:
   a) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ [x,y]\mapsto[-3x-12y,2x+7y]$; b) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ [x,y]\mapsto[2x-y,4x+y]$;
   c) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\ [x,y]\mapsto[2x+4y,2y]$; d) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\ [x,y,z]\mapsto[x,2x-y,-x+y+2z]$.

8. Wyznaczyć wartości i wektory własne oraz podprzestrzenie niezmiennicze danych macierzy:
   a) $\begin{bmatrix}2&-1&1\\-2&1&-1\\2&1&3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}0&-4&-2\\1&4&1\\0&0&1\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$.

9. Wyznaczyć macierze przejścia z baz kanonicznych do danych baz oraz określić współrzędne danych wektorów v w tych bazach:
   a) $B=\left\{\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right\}$, $v=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$; b) $B=\left\{\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right\}$, $v=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$;
   c) $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, $v=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$.

10. Wyznaczyć macierze przekształceń w zadanych bazach mając dane ich macierze w bazach kanonicznych:
    a) $B=\{[1,2]^T,[2,5]^T\}$, $A=\begin{bmatrix}7&-2\\10&-2\end{bmatrix}$; b) $B=\{[1,0,0]^T,[1,1,0]^T,[1,1,1]^T\}$, $A=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\2&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$;
    c) $B=\{[2,1]^T,[3,1]^T\}$, $A=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}$; d) $B=\{[0,0,1]^T,[1,0,0]^T,[0,1,0]^T\}$, $A=\begin{bmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{bmatrix}$.

11. Wyznaczyć rokłady $A=P\Lambda P^{-1}$ macierzy przekształceń z zadań 7 a) i 8 a) oraz macierzy:
    a) $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix}5&-12\\2&-5\end{bmatrix}$; c) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$.