Układ m równań liniowych z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Macierz układu: $A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Macierz uzupełniona: $U := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

Macierzowy i kolumnowy zapis układu

$$Ax = b,$$

gdzie A jest macierzą układu, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ są odpowiednio wektorami niewiadomych i wyrazów wolnych.

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} | \\ a_{*1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} | \\ a_{*2} \\ | \end{bmatrix} + ... + x_n \cdot \begin{bmatrix} | \\ a_{*n} \\ | \end{bmatrix} = b,$$

gdzie $\begin{bmatrix} | \\ a_{*j} \\ | \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dla $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Przykład 1. Rozwiązać układy równań:

1. $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 3 \end{cases}$;

2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$;

3. $x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 1 (Kroneckera-Capellego). *Niech A, U będą odpowiednio macierzą i macierzą uzupełnioną układu równań liniowych z n niewiadomymi. Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $rA = rU$.*

Fakt 2. *Jeśli $rA = rU = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest oznaczony). Jeśli $rA = rU = k < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n-k$ parametrów (jest nieoznaczony). Jeśli $rA \neq rU$, to układ nie ma rozwiązania (jest sprzeczny).*

Uwaga 1. Rozwiązanie nieoznaczonego układu równań $Ax = b$, gdzie b nie jest wektorem zerowym ma postać:

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-k} t_i x_i.$$

Nie jest to podprzestrzeń liniowa. Zbiór wektorów postaci $x_0 + W$, gdzie W jest podrzestrzenią liniową nazywamy *podprzestrzenią afiniczną* lub *warstwą* podprzestrzeni liniowej W.

Układy jednorodne

Def. 1. Układ równań $Ax = 0$ nazywamy *jednorodnym*.

Wn. 3. *Układ jednorodny zawsze ma rozwiązanie. Jest ono $(n-k)$-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie n jest ilością niewiadomych, a k jest rzędem macierzy układu.*

$$x = \sum_{i=1}^{n-k} t_i x_i = lin\{x_1, x_2, ..., x_{n-k}\}.$$

Uwaga 2. Rozwiązanie układu niejednorodnego $Ax = b$ dostajemy dodając do dowolnego wektora x_0 spełniającego ten układ rozwiązanie układu jednorodnego $Ax = 0$.

Wyznacznik

Def. 2. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy $A = (a_{ij})$ przyporządkowuje liczbę $\det A$ zgodnie z następującym schematem indukcyjnym:

1. Dla macierzy $A = (a_{11})$ stopnia 1:

$$\det A := a_{11},$$

2. Dla macierzy stopnia $n \geq 2$:

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Wyrażenie $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* wyrazu a_{ij}. Stosujemy również oznaczenie $|a_{ij}| := \det(a_{ij})$.

Wn. 4 (Wyznacznik macierzy stopnia 2:). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Wn. 5 (Wzór Sarrusa:). $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$

Uwaga 3. Wzór Sarrusa stosujemy tylko i wyłącznie do macierzy stopnia 3!!!

Rozwinięcie Laplace'a

Twierdzenie 6. *Wyznacznik macierzy $A = (a_{ij})$ jest równy rozwinięciu względem dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny:*

- $\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$

  (rozwinięcie względem k-tego wiersza)

- $\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$

  (rozwinięcie względem k-tej kolumny)

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $\det I_n = 1$.(macierz jednostkowa dowolnego stopnia ma wyznacznik równy 1)
3. Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi wyrazów głównej przekątnej.
4. Jeśli w macierzy zamienimy miejscami dwa wiersze (dwie kolumny), to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.
5. Jeśli macierz A posiada dwa jednakowe wiersze (kolumny), to $\det A = 0$.
6. $\det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ aw_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = a \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$ (z dowolnego wiersza (kolumny) można wyciągnąć stałą przed wyznacznik).

7. $\det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k + w_k' \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k' \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix}$

   i analogicznie dla kolumn.

8. Jeżeli macierz A ma zerowy wiersz (kolumnę), to $\det A = 0$.

9. Jeżeli do dowolnego wiersza (kolumny) macierzy dodamy dowolną kombinację liniową pozostałych, to wyznacznik nie zmieni się.

Uwaga 4. Własności 6., 9. pozwalają zastosować metodę Gaussa do szybkiego obliczania wyznaczników dowolnego stopnia. Po wyzerowaniu wszystkich poza jednym wyrazów wiersza (kolumny) rozwinięcie Laplace'a obniża o jeden stopień wyznacznika.

10. Jeśli $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times m}$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$ i

$$D := \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{array}\right],$$

   to

$$\det D = \det A \cdot \det B.$$

Twierdzenie 7 (Cauchy'ego)**.**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą dopełnień algebraicznych

Twierdzenie 8. *Macierz kwadratową $A = (a_{ij})$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$*. Jej macierzą odwrotną jest $A^{-1} = (b_{ij})$, gdzie:*

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$$

dla wszystkich i, j.

Algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej:

1. Obliczamy $\det A$. A^{-1} wyznaczamy tylko w przypadku $\det A \neq 0$.
2. Wyznaczamy *macierz dopełnień algebraicznych* $D := ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$.
3. Transponujemy macierz D.
4. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$.

Wyznacznik, a rząd macierzy

Fakt 9. *Rząd macierzy kwadratowej A stopnia n jest równy n wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det A \neq 0$.

Def. 3. *Minorem stopnia k* macierzy $A_{m \times n}$ nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy powstałej z A przez skreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn.

Twierdzenie 10. *Rząd macierzy jest równy najwyższemu stopniowi jej niezerowego minora.*

Minory główne i rozkład $A = LU$

Def. 4. Minorem *głównym* macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z A przez skreślenie wierszy i kolumn o tych samych numerach. Przez M_k oznacza się początkowy minor stopnia k, czyli powstały po skreśleniu ostanich $n-k$ wierszy i kolumn.

Fakt 11. *Nieosobliwa macierz kwadratowa A ma rozkład $A = LU$, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej początkowe minory główne M_k są różne od zera.*

Przykład 2. Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ nie ma rozkładu $A = LU$.

Układy Cramera

Def. 5. *Układem Cramera* nazywamy układ n równań z n niewiadomymi, którego macierz jest nieosobliwa.

Twierdzenie 12 (Cramera)**.** *Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest ono określone wzorem:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

gdzie dla $j \in \{1, ..., n\}$, A_j oznacza macierz powstałą po zamianie w macierzy A układu j-tej kolumny, kolumną wyrazów wolnych B.

Przykład 3. Rozwiązać metodą Cramera układ równań: $\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \end{array} \right.$.

Permutacje

Def. 6. *Permutacją* zbioru $X = \{1, 2, ..., n\}$ nazywamy dowolne wzajemnie jednoznaczne przekształcenie zbioru X na siebie.

Permutacje zapisujemy: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Twierdzenie 13. *Zbiór wszystkich permutacji zbioru X z działaniem ich składania jest grupą.*

Grupę permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy S_n. Jej *rząd*, czyli ilość elementów, to $n!$. Element neutralny oznaczamy id.

Uwaga 5. Składając permutacje czytamy je od prawej strony, ponieważ $\tau\sigma(X) := \tau(\sigma(X))$. Składanie permutacji nie jest przemienne!

Permutacyjna definicja wyznacznika. Dowód Tw. Laplace'a.

Def. 7. Mówimy, że dwie wartości permutacji σ tworzą *inwersję*, gdy mniejszemu argumentowi i odpowiada większa wartość $\sigma(i)$. Permutację $\sigma \in S_n$ nazywamy *parzystą* lub *nieparzystą*, gdy ma odpowiednio parzystą lub nieparzystą liczbę inwersji.

Def. 8. *Znakiem* permutacji σ jest liczba 1, gdy jest ona parzysta, a liczba -1, gdy jest nieparzysta. Znak permutacji σ oznaczamy $\text{sgn}(\sigma)$.

Twierdzenie 14 (Permutacyjna definicja wyznacznika)**.** *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

Lemat 15. *Jeżeli permutacja σ' powstaje z permutacji*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

poprzez wykreślenie jednej kolumny $\begin{pmatrix} i \\ j = \sigma(i) \end{pmatrix}$ i zmniejszenie o jeden argumentów większych od i oraz wartości większych od j, to

$$\text{sgn}(\sigma') = (-1)^{i+j} \text{sgn}(\sigma).$$

Cykle, transpozycje

Def. 9. Permutację $\pi \in S_n$ nazywamy *cyklem* rzędu k (*cyklem k-wyrazowym*) jeżeli istnieje taki podzbiór $Y = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, że

- $\pi(a_i) = a_{i+1}$ dla $i \in \{1, ..., k-1\}$,

- $\pi(a_k) = a_1$ i
- $\pi(m) = m$ dla $m \notin Y$.

Taki cykl zapisujemy $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Permutacja tożsamościowa *id* jest cyklem rzędu 0

Twierdzenie 16. *Każda permutacja jest cyklem lub złożeniem cykli rozłącznych. Rozkład na cykle jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników.*

Def. 10. Cykl rzędu 2 nazywamy *transpozycją.*

Fakt 17. $(a_1, a_2, ..., a_k) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_4)...(a_{k-2}, a_{k-1})(a_{k-1}, a_k)$.

Wn. 18. *Każda permutacja jest złożeniem transpozycji.*

Fakt 19. *Każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji liczb sąsiednich.*

Fakt 20. *Każda transpozycja jest permutacją nieparzystą.*

Twierdzenie 21. *Znak permutacji zmienia się na przeciwny po złożeniu jej z dowolną transpozycją.*

Wn. 22. *Dla $k \geq 2$ cykl rzędu k ma znak $(-1)^{k-1}$.*

Uwaga 6. Najprostszy sposób określenia znaku permutacji, to zapisanie jej w postaci złożenia cykli i policzenie przecinków.

Macierze permutacji

Def. 11. Macierzą *permutacji* P_σ nazywamy macierz powstałą z macierzy jednostkowej w wyniku permutacji σ jej wierszy.

Wn. 23. *Dowolna macierz permutacji jest iloczynem macierzy elementarnych typu E_{ij}.*

Fakt 24. *Dla dowolnej macierzy nieosobliwej A istnieją takie macierze: permutacji P_σ, trójkątna dolna L i tójkątna górna U, że*

$$P_\sigma A = LU.$$

Przykład 4. Wyznaczyć rozkład $P_\sigma A = LU$ dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.