Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$

Def. 1. Rzeczywistą n-wymiarową przestrzenią wektorową (liniową) $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór n-wyrazowych ciągów liczb rzeczywistych $[x_1, x_2, ..., x_n]$ z następującymi działaniami dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby:

$$[x_1, x_2, ..., x_n] + [y_1, y_2, ..., y_n] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n],$$

$$a \cdot [x_1, x_2, ..., x_n] := [a \cdot x_1, a \cdot x_2, ..., a \cdot x_n].$$

Wektory oznaczamy: $\overrightarrow{x} := [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Wektor *zerowy* to $\overrightarrow{0} := [0, 0, ..., 0]$.

Uwaga 1. Analogicznie określamy n-wymiarową zespoloną przestrzeń wektorową $\mathbb{C}^n$ przyjmując liczby zespolone zamiast rzeczywistych.

Przestrzeń liniowa

Def. 2. Niepusty zbiór V nazywa się *przestrzenią liniową* (lub *wektorową*) nad ciałem K, jeśli

1. V z działaniem dodawania jest grupą abelową;
2. określone jest działanie mnożenia elementów zbioru V przez elementy ciała K spełniające warunki:
   (a) $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
   (b) $a(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = a\overrightarrow{x} + a\overrightarrow{y}$
   (c) $(a + b)\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{x}$
   (d) $a(b\overrightarrow{x}) = (ab)\overrightarrow{x}$

Małe łacińskie litery oznaczają tu elementy ciała K i nazywamy je *skalarami*, 1 jest elementem neutralnym mnożenia w tym ciele, a litery ze strzałką oznaczają elementy zbioru V i nazywamy je *wektorami*. Element neutralny grupy wektorów $(V, +)$ nazywamy *wektorem zerowym* i oznaczamy $\overrightarrow{0}$.

Twierdzenie 1. *Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią liniową.*

Def. 3. Dowolny podzbiór W przestrzeni liniowej V będący przestrzenią liniową względem dodawania wektorów z V i mnożenia ich przez skalary z K nazywamy *podprzestrzenią przestrzeni liniowej V*.

Uwaga 2. Wprost z definicji wynika, że wektor zerowy należy do każdej podprzestrzeni i zbiór złożony tylko z wektora zerowego jest najmniejszą podprzestrzenią dowolnej przestrzeni. Podprzestrzeń taką nazywamy *podprzestrzenią zerową*.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego niepustego podzbioru W przestrzeni V następujące warunki są równoważne:*

1. *W jest podprzestrzenią,*
2. *dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ i dowolnego skalara a wektory $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ i $a\overrightarrow{x}$ należą do W,*
3. *dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ i dowolnych skalarów a, b wektor $a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{y}$ należy do W.*

Przykłady

1. Przestrzeniami liniowym nad $\mathbb{R}$ są również następujące zbiory:
   - Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste.
   - Zbiór $\mathrm{R}[x]$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby rzeczywiste.
   - Zbiór $\mathbb{R}^\infty$ nieskończonych ciągów liczb rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem przez liczby rzeczywiste po współrzędnych.
   - Zbiór $C([a,b])$ funcji ciągłych określonych na przedziale $[a,b]$ z działaniami $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ i $(af)(x) := af(x)$.
2. Weźmy w $\mathbb{R}^3$ zbiory: $W_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ i

   $W_2 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

   W_1 jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a W_2 nie jest.

Kombinacje liniowe

Def. 4. Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ o współczynnikach $a_1, a_2, ..., a_k$ nazywamy wektor

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = a_1 \overrightarrow{x}_1 + a_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + a_k \overrightarrow{x}_k.$$

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego podzbioru S przestrzeni V zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z S jest podprzestrzenią.*

Podprzestrzeń tę oznaczmy $linS$ i nazywamy *podprzestrzenią generowaną przez zbiór S.*

Liniowa niezależność wektorów

Def. 5. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_k$ są *liniowo niezależne* gdy z zerowania się dowolnej ich kombinacji liniowej wynika zerowanie się wszystkich współczynników tej kombinacji.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory są *liniowo zależne.*

Uwaga 3. Wektory są liniowo zależne gdy istnieją takie $a_1, a_2, ..., a_k$, nie wszystkie równe 0, że

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0}.$$

Fakt 4. *Wektory są liniowo zależne* $\Leftrightarrow$ *jeden z nich można zapisać jako kombinację liniową pozostałych.*

- Wektor zerowy jest liniowo zależny od każdego innego wektora.
- Każdy układ wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.
- Dowolny niezerowy wektor generuje *prostą*.
- Dowolne dwa wektory liniowo niezależne generują *płaszczyznę*.

Przykład 1. 1. $lin\{[1,2,1]\} = \{[t,2t,t]: t \in \mathbb{R}\}$ jest prostą zawartą w $\mathbb{R}^3$.

2. $lin\{[1,1,1],[1,1,0],[0,0,1]\} = lin\{[1,1,0],[0,0,1]\}$ jest płaszczyzną zawartą w $\mathbb{R}^3$, ponieważ wektory $[1,1,0]$ i $[0,0,1]$ są niezależne, a $[1,1,1] = [1,1,0] + [0,0,1]$.

Część wspólna i suma podprzestrzeni

Fakt 5. *Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to:*

1. *zbiór $U \cap W$ jest podprzestrzenią;*
2. *zbiór $U \cup W$ jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.*

Def. 6. Sumą podprzestrzeni U i W przestrzeni liniowej V nazywamy podprzestrzeń generowaną przez zbiór $U \cup W$

$$U + V := lin(U \cup W).$$

Wn. 6. $U + V := \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}: \overrightarrow{u} \in U, \overrightarrow{w} \in W\}$.

Baza przestrzeni i podprzestrzeni

Twierdzenie 7 (Steinitza)**.** *Niech wektory $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_n$ generują przestrzeń V, a wektory $\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2, ..., \overrightarrow{y}_k \in V$ będą liniowo niezależne. Wówczas $k \leq n$.*

Def. 7. Zbiór wektorów liniowo niezależnych, który generuje przestrzeń (podprzestrzeń) liniową nazywamy jej *bazą*

Twierdzenie 8. *Dla dowolnego zbioru $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, ..., \overrightarrow{b}_n\}$ wektorów przestrzeni liniowej (lub jej podprzestrzeni) następujące warunki są równoważne:*

1. *zbiór $\mathcal{B}$ jest bazą,*

2. *$\mathcal{B}$ jest maksymalnym zbiorem wektorów liniowo niezależnych;*

3. *$\mathcal{B}$ jest minimalnym zbiorem generującym;*

4. *każdy wektor można zapisać jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru $\mathcal{B}$.*

Wymiar przestrzeni i podprzestrzeni

Twierdzenie 9. *Jeżeli przestrzeń liniowa (lub podprzestrzeń) ma bazę n-elementową, to każda jej baza ma n elementów.*

Def. 8. Ilość wektorów bazy nazywamy *wymiarem* przestrzeni (lub podprzestrzeni) V i oznaczamy $\dim V$.

Bazę *kanoniczną* (*standardową*) przestrzeni $\mathbb{R}^n$ tworzą wektory $\varepsilon_1 = [1, 0, ..., 0, 0], \varepsilon_2 = [0, 1, 0, ..., 0], ..., \varepsilon_n = [0, 0, ..., 0, 1]$.

Uwaga 4. Przestrzenie $\mathbb{R}^\infty$, $\mathrm{R}[x]$ i $C([a, b])$ nie mają skończonych baz. O takich przestrzeniach mówimy, że są nieskończenie wymiarowe, $\dim\mathbb{R}^\infty = \infty$, $\dim\mathrm{R}[x] = \infty$, $\dim C([a, b]) = \infty$.

Twierdzenie 10. *Jeśli U i W są skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V, to* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Lemat 11. *Liniowa niezależność układu wektorów $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3, ..., \overrightarrow{x}_k$ jest równoważna liniowej niezależności układu wektorów*

$$\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 - a\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_3, ..., \overrightarrow{x}_k$$

dla dowolnego skalara a.

Wn. 12. *Liniowa zależność (bądź niezależność) układu k wektorów nie zmieni się, gdy*

1. *dowolne kombinacje liniowe jednego z nich odejmiemy od pozostałych wektorów;*

2. *od jednego z wektorów odejmiemy dowolną kombinację liniową pozostałych.*

Przykład 2. Sprawdzić, czy wektory $[1, 1, 1]$, $[2, 3, 4]$, $[3, 5, 7]$ są liniowo zależne.

Macierz

Def. 9. Niech $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. *Macierzą rzeczywistą* o m wierszach i n kolumnach nazywamy dowolną funkcję, która wszystkim parom (i, j) przyporządkowuje liczby rzeczywiste a_{ij}, nazywane *wyrazami* tej macierzy. Macierz zapisujemy: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

Stosujemy oznaczenia: A, $A_{m\times n}$, (a_{ij}), $(a_{ij})_{m\times n}$. Będziemy też oznaczać w niektórych dowodach twierdzeń $[A]_{ij}$, (i,j)-ty wyraz danej macierzy A.

Uwaga 5. W taki sam sposób określa się macierz zespoloną, która parom indeksów przyporządkowuje liczby zespolone i macierze nad dowolnymi innymi ciałami.

Przykład 3. Najprostszy czarno-biały obraz na ekranie monitora o rozdzielczości 1024×768 pikseli można zapisać w postaci macierzy zero-jedynkowej. Świecącemu punktowi przyporządkowujemy wartość 1, a ciemnemu wartość 0. Zapisać za pomocą macierzy zero-jedynkowej każdą ze świecących przekątnych ekranu.

Uwaga 6. Typowe czarno-białe zdjęcie w zapisie cyfrowym to macierz 2064×3088 (lub jeszcze większa dla większej rozdzielczości) o wartościach od 0 do 255 (2^8 odcieni szarości), a dla cyfrowego zapisu zdjęcia kolorowego potrzeba trzech takich macierzy, po jednej dla każdej z trzech podstawowych barw.

Wiersze i kolumny

Wiersze macierzy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ to macierze $a_{i*} := \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ dla $i \in \{1,...,m\}$. Będziemy je utożsamiać z wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Kolumny macierzy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ to macierze $a_{*j} := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dla $j \in \{1,...,n\}$. Będziemy je utożsamiać z wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Będziemy też pisać $A = \begin{bmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \end{bmatrix}$ lub $A = \begin{bmatrix} -a_{1*}- \\ -a_{2*}- \\ \vdots \\ -a_{m*}- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$.

Transpozycja. Pewne rodzaje macierzy

Def. 10. Transpozycją macierzy $A = (a_{ij})_{m\times n}$ nazywamy taką macierz $A^T = (c_{ij})_{n\times m}$, że

$$c_{ij} = a_{ji},$$

dla wszystkich i, j, czyli taką, której wierszami są kolumny macierzy A (a kolumnami oczywiście wiersze macierzy A).

- Macierzą *kwadratową* stopnia n nazywamy macierz o tej samej liczbie n wierszy i kolumn.

- Macierz kwadratową $A = (a_{ij})_{n\times n}$ nazywamy:

  diagonalną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, (wyrazy $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ tworzą *główną przekątną* macierzy A),

  trójkątną górną, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$ (zera pod gł. przekątną), *trójkątną dolną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$ (zera nad gł. przekątną),

symetryczną, gdy $A^T = A$ (czyli, gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich i, j).

Rząd macierzy

Uwaga 7. Wiersze macierzy $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} -a_{1*}- \\ -a_{2*}- \\ \vdots \\ -a_{m*}- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$, generują pewną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a kolumny podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Nazywa się je odpowiednio *przestrzenią wierszy* (ang. *row space*) i *przestrzenią kolumn* (ang. *column space*).

Twierdzenie 13. *Przestrzenie kolumn i wierszy dowolnej macierzy mają te same wymiary.*

Def. 11. *Rzędem* macierzy nazywamy wymiar jej przestrzeni wierszy (lub kolumn). Rząd macierzy A oznaczamy rA.

Wn. 14. *Rząd macierzy jest równy maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych wierszy oraz maksymalnej liczbie jej liniowo niezależnych kolumn.*

Twierdzenie 15 (O operacjach elementarnych)**.** *Rząd macierzy A nie zmieni się gdy:*

1. *dowolny wiersz pomnożymy przez liczbę różną od zera,*
2. *dowolnie zmienimy kolejność wierszy,*
3. *do dowolnego wiersza dodamy kombinację liniową pozostałych,*
4. *wykreślimy wiersz złożony z samych zer,*
5. *przetransponujemy macierz,*
6. *wykonamy jakąkolwiek z operacji 1.2.3.4. na kolumnach.*

Rząd macierzy schodkowej

Przykład 4. $r\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$ $\quad r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4.$

Def. 12. Macierzą *schodkową* nazywamy macierz, której pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy znajdują się w coraz dalszych kolumnach, a wiersze zerowe umieszczone są najniżej. Pierwszy element niezerowy każdego wiersza nazywamy *elementem głównym* (*wiodącym*) (ang. *pivot*).

Twierdzenie 16. *Rząd macierzy schodkowej jest równy ilości niezerowych wierszy (czyli ilości elementów głównych).*

Uwaga 8. Wygodnie, gdy elementy główne są jedynkami.

Wyznaczanie rzędu macierzy metodą eliminacji Gaussa

Dowolną macierz sprowadzamy do postaci schodkowej za pomocą operacji, które nie zmieniają rzędu:

1. Jako pierwszy ustawiamy wiersz, który najwcześniej ma niezerowy wyraz,
2. jedynkę główną dostajemy dzieląc wiersz przez pierwszy niezerowy wyraz,
3. zera pod jedynką główną dostajemy odejmując odpowiednie kombinacje wiersza z jedynką główną od wierszy znajdujących się niżej,
4. opisaną operację powtarzamy dla kolejnych wierszy, aż do uzykania postaci schodkowej macierzy.

Przykład 5. Wyznaczyć rzędy danych macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

Uwagi do eliminacji Gaussa

1. Jedynkę główną można też niekiedy uzyskać zamieniając wiersze miejscami.
2. Pojawiające się wiersze zerowe można wykreślać i nie pisać ich w następnych krokach.
3. Łatwo zauważyć liniową zależność dwóch wierszy, ponieważ są one proporcjonalne. Na każdym etapie jeden z takich wierszy można wykreślić. Zostawiamy oczywiście ten drugi!
4. Jeśli zauważymy, że wyrazy stojące pod pierwszym niezerowym wyrazem pierwszego wiersza dzielą się przez ten wyraz, to nie trzeba zamieniać go w jedynkę główną.

Przykład 6. Sprawdzić, czy wektory $[1,1,1]$, $[1,2,3]$ i $[2,4,8]$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Normalna i zredukowana postać schodkowa

Def. 13. Mówimy, że macierz schodkowa ma *normalną* postać schodkową, gdy każdy element główny jest jedynką i każda jedynka główna jest jedynym niezerowym elementem swojej kolumny oraz *zredukowaną* postać schodkową (*row-reduced echelon form), gdy dodatkowo nie ma wierszy zerowych.*

Zredukowaną postać macierzy otrzymujemy wykreślając w postaci schodkowej wiersze zerowe i stosując „odwrotny” algorytm Gaussa. W pierwszym kroku od pierwszych $r-1$ wierszy odejmujemy odpowiednie kombinacje ostatniego wiersza, żeby wyzerować wszystkie wyrazy nad ostatnią jedynką główną.

Przykład 7. Sprowadzić macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ do zredukowanej postaci schodkowej.

Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$

Def. 14. *Standardowym iloczynem skalarnym* wektorów $\overrightarrow{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ i $\overrightarrow{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]$ nazywamy liczbę:

$$\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = \sum_{l=1}^{k} x_l y_l = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Uwaga 9. Iloczyn skalarny oznacza się również $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, $(\overrightarrow{x} | \overrightarrow{y})$, $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$, $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle$, $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$.

Działania na macierzach

Macierze o tych samych wymiarach dodajemy i mnożymy przez liczby tak samo jak wektory przestrzeni $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ tzn.:

$$c \cdot (a_{ij})_{m \times n} := (c \cdot a_{ij})_{m \times n}; \qquad (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Zbiór $(m \times n)$-macierzy z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową. Oznaczamy ją $\mathbf{M}_{m \times n}$.

Def. 15. Iloczynem macierzy $A = (a_{ij})_{m \times k}$ i $B = (b_{ij})_{k \times n}$ nazywamy macierz $AB = (c_{ij})_{m \times n}$, której współczynniki są określone wzorem:

$$[AB]_{ij} = c_{ij} := \textstyle\sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}.$$

(wyraz c_{ij} macierzy wyniku jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza pierwszej i j-tej kolumny drugiej macierzy.)

Uwaga 10. Macierze można mnożyć tylko wtedy, gdy wiersze pierwszej są tej samej długości co kolumny drugiej, czyli gdy pierwsza ma tyle samo kolumn co druga wierszy.

Standardowy iloczyn skalarny jako iloczyn macierzy

Wektory $\overrightarrow{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ i $\overrightarrow{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]$ utożsamiamy z macierzami $x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i odpowiednio $y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. Wówczas

$$x^T \cdot y = y^T \cdot x$$

jest macierzą wymiaru 1×1, której jedyny wyraz jest równy iloczynowi skalarnemu wektorów $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$. Macierz tę utożsamiamy z jej jedynym wyrazem.

Uwaga 11. Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Macierz $y \cdot x^T$ ma n wierszy i n kolumn!

Mnożenie kolumn przez wiersze

Ze wzoru na mnożenie macierzy $A = (a_{ij})_{m\times k}$ i $B = (b_{ij})_{k\times n}$ wynika, że

$$A \cdot B = \sum_{l=1}^{k} a_{*l} \cdot b_{l*} = \sum_{l=1}^{k} \begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} \end{bmatrix}.$$

W ten sposób otrzymujemy też rozkład macierzy $A \cdot B \in \mathbf{M}_{m\times n}$ na sumę k macierzy z $\mathbf{M}_{m\times n}$. Każdy ze składników tej sumy jest macierzą rzędu 1 (lub 0, jeśli pewna kolumna macierzy A lub wiersz macierzy B składa się z samych zer).

Przykład 8. Mnożąc kolumny przez wiersze wyznaczyć iloczyn macierzy i jego przedstawienie w postaci sumy macierzy rzędu 1: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rzędy iloczynu i sumy macierzy

Uwaga 12. 1. Każda kolumna macierzy AB jest kombinacją liniową kolumn macierzy A.

2. Każdy wiersz macierzy AB jest kombinacją liniową wierszy macierzy B.

Wn. 17. *1.* $r(AB) \leq rA$*;*

2. $r(AB) \leq rB$*;*

3. $r(A + B) \leq rA + rB$*.*

Macierze: zerowa, jednostkowa i odwrotna

Def. 16. 1. Macierzą *zerową* wymiaru $m \times n$ nazywamy macierz $\mathbf{0}_{m\times n}$, której wszystkie wyrazy są równe zero.

2. *Macierzą jednostkową* nazywamy macierz diagonalną, dla której dodatkowo $a_{ii} = 1$, czyli na głównej przekątnej stoją jedynki. Macierze jednostkowe oznaczamy $\mathcal{I}$ lub $\mathcal{I}_n$, gdy chcemy podać wymiar.

3. Macierzą odwrotną macierzy kwadratowej A nazywamy taką macierz B, że $AB = BA = \mathcal{I}$. Macierz odwrotną macierzy A oznaczamy A^{-1}. Macierz kwadratową nazywamy *nieosobliwą*, gdy istnieje jej macierz odwrotna i *osobliwą* w przeciwnym przypadku.

Macierz zerowa jest elementem neutralnym dodawania macierzy. Macierz jednostkowa jest elementem neutralnym mnożenia macierzy, dokładniej dla dowolnych macierzy A, B zachodzi $A\mathcal{I} = A$ i $\mathcal{I}B = B$ o ile tylko mnożenia są wykonalne.

Własności działań na macierzach

Jeśli tylko wskazane działania można wykonać, to:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+B = B+A$
3. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
4. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
5. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
6. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$
7. Dla dowonej macierzy A, macierz $A\cdot A^T$ jest symetryczna.
8. Iloczyn macierzy nieosobliwych jest macierzą nieosobliwą i $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.
9. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Uwaga 13. Rzeczywiste macierze nieosobliwe stopnia n z działaniem mnożenia są ważnym przykładem grupy nieprzemiennej. Oznaczamy ją $GL(n,\mathbb{R})$.

Przykład 9. Wyznaczyć macierze X z równań:

1. $A\cdot X + B = C$,
2. $X\cdot A - C = X\cdot B$,
3. $A\cdot X\cdot B = C$,
4. $A\cdot B\cdot X = C$.

Rozkład $A = CR$

Budowa macierzy C (od ang. *columns*):

1. Pierwsza kolumna macierzy C, to pierwsza niezerowa kolumna macierzy A
2. Każda następna kolumna macierzy C to pierwsza z macierzy A liniowo niezależna z wziętymi wcześniej.

Fakt 18. *Kolumny macierzy C tworzą bazę przestrzeni kolumn macierzy A.*

Budowa macierzy R (od ang. *rows*): Kolejne kolumny macierzy R tworzą współczynniki kombinacji liniowych kolumn macierzy A w bazie kolumn macierzy C.

Fakt 19 (Dowód Twierdzenia 13)**.** *Macierz R ma zredukowaną postać schodkową. Jej wiersze tworzą bazę przestrzeni wierszy macierzy A.*

Macierze elementarne

Def. 17. Macierzą elementarną E_{ij}, $E_{ij}(t)$, $E_i(t)$ nazywamy macierz powstałą z macierzy jednostkowej przez odpowiednio: E_{ij} - zamianę miejscami wierszy $w_i \leftrightarrow w_j$, $E_{ij}(t)$ - dodanie do wiersza w_i wiersza w_j pomnożonego przez t (operację elementarną w_i+tw_j), $E_i(t)$ - pomnożenie wiersza w_i przez t (operację elementarną tw_i).

Przykład 10. Dla macierzy stopnia 3: $E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{31}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fakt 20. *Macierze elementarne są macierzami nieosobliwymi oraz:* $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $(E_{ij}(t))^{-1} = E_{ij}(-t)$, $(E_i(t))^{-1} = E_i\left(\frac{1}{t}\right)$.

Fakt 21. *W wyniku mnożenia dowolnej macierzy A z lewej strony przez macierz elementarną E otrzymujemy macierz $B = EA$ powstałą z A przez analogiczną operację elementarną na jej wierszach.*

Przykład 11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Wn. 22. *Macierz powstała z macierzy A przez jej pomnożenie z lewej strony przez macierz elementarną ma ten sam rząd co A.*

Fakt 23. *Jeśli macierz schodkowa S powstaje z macierzy A metodą eliminacji Gaussa, to istnieje taki ciąg macierzy elementarnych: $E_1, E_2, ..., E_k$, że $S = E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$. Wówczas*

$$A = BS,$$

gdzie $B = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot, ..., \cdot E_k^{-1}$.

Przykład 12. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ znaleźć taką macierz schodkową S i macierz nieosobliwą B, że $A = BS$.

Fakt 24. *Iloczyn macierzy trójkątnych dolnych jest macierzą trójkątna dolną, a iloczyn macierzy trójkątnych górnych jest macierzą trójkątną górną.*

Rozkład $A = LU$

Jeśli macierz A jest kwadratowa i w eliminacji Gaussa używamy tylko macierzy elementarnych $E_{ij}(t)$ przy $i > j$, to otrzymujemy rozkład

$$A = LU,$$

gdzie L jest macierzą trójkątną dolną (od ang. *Lower Triangular Matrix*), a U macierzą trójkątną górną (od ang. *Upper*).

Uwaga 14. W praktyce, żeby otrzymać macierz L wystarczy w macierzy jednostkowej zera pod główną przekątną zastąpić liczbami przeciwnym do odpowiednich współczynników używanych macierzy $E_{ij}(t)$.

Przykład 13. Wyznaczyć rozkłady $A = LU$ dla danych macierzy: $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Algorytm odwracania macierzy oparty na eliminacji Gaussa:

1. Obok macierzy kwadratowej A stopnia n piszemy macierz jednostkową $\mathcal{I}_n$,

2. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach tak zbudowaną (podwójną) macierz $[A|\mathcal{I}_n]$ sprowadzamy do postaci schodkowej normalnej. Jeśli otrzymana z A macierz schodkowa normalna ma rząd mniejszy niż n, to macierz odwrotna nie istnieje.

3. Jeśli otrzymana z A macierz schodkowa normalna jest macierzą jednostkową, to wyjściowa macierz jednostkowa zostaje przekształcona w A^{-1}.

   $[A|\mathcal{I}_n] \to [\mathcal{I}_n|A^{-1}]$.

Wn. 25. *Macierz kwadratowa jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest iloczynem macierzy elementarnych.*

Wn. 26. *Macierz kwadratowa stopnia n jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $rA = n$.*

Wn. 27. *Jeśli macierz A jest nieosobliwa, to dla dowolnych macierzy B i C $r(AB) = rB$ i $r(CA) = rC$ (jeśli tylko mnożenia są wykonalne).*

Uwaga 15. Mnożeniu prawostronnemu dowolnej macierzy przez transpozycje macierzy elementarnych odpowiadają analogiczne operacje elementarne na kolumnach danej macierzy. Algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej można oprzeć na tych samych operacjach elementarnych na odpowiadających sobie kolumnach macierzy A i $\mathcal{I}$. Nie można jednak mieszać w jednym algorytmie operacji na wierszach i kolumnach!

Przykłady

Sprawdzić czy istnieją macierze odwrotne danych macierzy i znaleźć je, gdy istnieją:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

3. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.