

Literatura

- J. Kosiorek, Skróty wykładów i listy zadań. Strona internetowa <http://wmii.uwm.edu.pl/~kosiorek/>;
 - J. Rutkowski, *Algebra liniowa w zadaniach*;
 - J. Topp, *Algebra liniowa*;
 - T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, *Algebra liniowa 1/2; Definicje, twierdzenia, wzory, Przykłady i zadania*;
 - Gilbert Strang, *Linear Algebra and learning from data*, Wyd. Wellesley Cambridge Press, 2019.;
 - M. P. Deisenroth, A. A. Faisal, C. S. Ong, *Mathematics for machine learning*, Wyd. Cambridge University Press, 2020 (mml-book.github.io/book/mml-book.pdf).
- Matematyka w uczeniu maszynowym*, wyd. Helion, 2022.
- A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*.

Grupa

Def. 1. Grupą nazywamy zbiór G z działaniem $\circ$, gdy spełnione są warunki:

1. Działanie $\circ$ jest *łączne* tzn. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla dowolnych $a, b, c \in G$;
2. Istnieje *element neutralny* e działania $\circ$, czyli taki, że $a \circ e = e \circ a = a$ dla dowolnego $a \in G$;
3. Dla dowolnego $a \in G$ istnieje *element odwrotny* $a' \in G$, czyli taki, że $a \circ a' = a' \circ a = e$, gdzie e jest elementem neutralnym.

Mówimy, że grupa jest *abelowa* (*przemienna*), gdy $a \circ b = b \circ a$ dla dowolnych $a, b \in G$, (czyli jej działanie jest przemienne).

Podgrupa

Def. 2. Dowolny podzbiór grupy G , który jest grupą ze względu na to samo działanie nazywamy *podgrupą*.

Twierdzenie 1. Dowolny podzbiór H grupy G jest podgrupą $\Leftrightarrow H \neq \emptyset$ oraz dla dowolnych $a, b \in H$ do H należą również a^{-1} i $a \circ b$.

Przykłady

- Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 są grupą.
- Liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 nie są grupą.
- Liczby naturalne $\mathbb{N}$ nie są grupą ani z działaniem dodawania, ani z działaniem mnożenia.
- Liczby parzyste są podgrupą grupy liczb całkowitych.
- Liczby nieparzyste nie są podgrupą grupy liczb całkowitych.
- Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ i liczby wymierne $\mathbb{Q}$ z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 są grupami.
- Zbiory $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 są grupami.
- Grupy $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Q}, +)$ są podgrupami grupy $(\mathbb{R}, +)$.
- Grupa $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Ciało

Def. 3. *Ciałem* nazywamy zbiór F z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $0, 1 \in F$, gdy spełnione są warunki:

1. F z działaniem dodawania i elementem neutralnym 0 jest grupą abelową;
 2. $F \setminus \{0\}$ z działaniem mnożenia i elementem neutralnym 1 jest grupą abelową;
 3. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, tzn. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- Prawa łączności, rozdzielności i przemienności są spełnione we wszystkich znanych ze szkoły zbiorach liczbowych $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (liczbach naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych).
 - Ciałami są liczby wymierne i liczby rzeczywiste.
 - Liczby wymierne są *podciałem* ciała liczb rzeczywistych (podciało definiuje się analogicznie do podgrupy).

Ciało liczb zespolonych

Def. 4. Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych z następującymi działaniami dodawania i mnożenia:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Postać algebraiczna:

$$z = x + yi$$

$x = \operatorname{Re} z$ - część rzeczywista, $y = \operatorname{Im} z$ - część urojona. Liczby w postaci algebraicznej mnożymy tak samo jak wyrażenia algebraiczne uwzględniając równość:

$$i^2 = -1$$

Def. 5. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę zespoloną:

$$\bar{z} = x - yi.$$

Reguła dzielenia: Licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. **Własności sprzężenia:**

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
5. $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
6. $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba $\bar{z}$ również.*

Twierdzenie 3 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$.*

Wn. 4. *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ rozkłada się na czynniki liniowe.*

Moduł i argument liczby zespolonej

Def. 6. Modulem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argumentem liczby z nazywamy dowolny kąt φ , taki że

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Piszemy *argz*. Dokładnie jeden argument danej liczby jest zawarty w przedziale $[0, 2\pi)$. Nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy *Argz*. **Interpretacja geometryczna:** Argument jest kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą i promieniem wodzącym punktu reprezentującego daną liczbę, a moduł odległością tego punktu od początku układu współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

gdzie r jest modulem a φ argumentem liczby z .

Przykład 2. 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających warunki

$$\begin{cases} |z| \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2. Równanie $|z - z_0| = r$ opisuje okrąg o środku z_0 i promieniu r .

Ważne wzory trygonometryczne:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej

$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
(Mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy argumenty.)

Twierdzenie 5 (Wzory Moivre'a). Dla dowolnej liczby zespolonej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ i liczby naturalnej n zachodzi:

1. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$

2. istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Postać wykładnicza liczby zespolonej:

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$e \approx 2,72$ jest liczbą niewymierną, nazywaną liczbą Eulera. Wzory Moivre'a w postaci wykładniczej: Dla $z = re^{i\varphi}$

1. $z^n = r^n e^{in\varphi}$;
2. istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Przykład 3. Wielomian $W(x) = x^4 + 4$ rozłożyć na czynniki stopnia 2.

Działania modulo n i ciała skończone Z_p

Dla dowolnej liczby naturalnej n bierzemy zbiór $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ i określamy w nim następujące działania dodawania i mnożenia:

$a \oplus_n b$ jest resztą z dzielenia $a + b$ przez n ;

$a \odot_n b$ jest resztą z dzielenia $a \cdot b$ przez n .

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to Z_n z tak określonymi działaniami jest ciałem. $a \oplus_n b$ czytamy a plus b modulo n . Podobnie a razy b modulo n . Piszemy też

$$a + b = c \pmod{n} \quad \text{ i } \quad a \cdot b = c \pmod{n}$$

zamiast $a \oplus_n b = c$ i $a \odot_n b = c$.

Uwaga 1. Jeżeli n jest liczbą złożoną, to Z_n nie jest ciałem. Różne od 1 dzielniki liczby n nie mają wtedy w Z_n elementów odwrotnych.