## Uwagi wstępne

1. Egzamin zerowy będzie tylko ustny. Uprawniony student, który go nie zda, nie otrzymuje oceny niedostatecznej, tylko może przystąpić do I-go terminu egzaminu, który składa się z pisemnego testu i egzaminu ustnego.
2. Każde pytanie na egzaminie ustnym zawierało będzie nieuciążliwy rachunkowo przykład, którego wcześniej nie udostępniam.
3. Każdy zestaw będzie zawierał 4 pytania z różnych działów.
4. Brak odpowiedzi na dwa pytania, to nieuniknione ocena ndst.
5. W przypadku braku odpowiedzi na jedno z pytań student otrzyma pytanie dodatkowe z działu powiązanego z tym pytaniem. Brak odpowiedzi, to nieuniknione ocena ndst.
6. Każdy student będzie miał minimum 15 minut na przygotowanie odpowiedzi.
7. Bezpośrednio po przejrzeniu zestawu będzie można wymienić go na inny. Po skorzystaniu z tej możliwości będzie można uzyskać z egzaminu najwyżej ocenę dst.
8. Lista osób dopuszczonych do egzaminu ustnego zostanie udostępniona w przeddzień wieczorem. Na egzamin należy przychodzić w kolejności zgodnej z tą listą (studenci z końca listy mogą przyjść później unikając długiego oczekiwania). Dopuszczalne są zamiany pomiędzy poszczególnymi osobami, które porozumieją się w tej sprawie.
9. Do egzaminu ustnego dopuszcza 35% punktów uzyskanych z testu jak już podano w sylabusie. Ponad 65% punktów z testu gwarantuje ocenę dst+. W tym przypadku student może zrezygnować ze zdawania egzaminu ustnego lub przystąpić do niego, jeśli chce uzyskać ocenę wyższą niż po teście.
10. Test będzie zawierał pytania teoretyczne i praktyczne. Należało będzie tylko zaznaczyć literę T (od TAK) jeśli zdanie jest prawdziwe i N (od NIE) jeśli jest fałszywe. Odpowiedź prawidłowa daje 1 pkt, nieprawidłowa -1 pkt, a brak odpowiedzi 0 pkt.

## Pytania egzaminacyjne z metod algebry liniowej w informatyce, Data Science and Artificial Intelligence 2025.

1. Definicja grupy i grupy abelowej. Podać przykłady zbiorów liczbowych, które tworzą grupy abelowe z działaniami dodawania lub mnożenia. Zbadać czy dany zbiór z danym działaniem jest grupą.
2. Definicja grupy i podgrupy. Podać przykład grupy nieprzemiennej i jej podgrupy. Wyznaczyć w grupie nieprzemiennej element $x$ z danego równania.
3. Definicja ciała. Przykłady ciał.
4. Ciało liczb zespolonych. Rozwiązać w liczbach zespolonych równanie liniowe.
5. Moduł, argument, postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór liczb spełniających dane warunki.
6. Wzory Moivre'a na potęgę i pierwiastki z liczby zespolonej. Zastosować.
7. Zasadnicze twierdzenie algebry i twierdzenie o sprzężonych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach rzeczywistych. Rozwiązać w $\mathbb{C}$ równanie stopnia $\geq 2$.
8. Definicja przestrzeni liniowej nad dowolnym ciałem oraz przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$. Własności działań. Kombinacja liniowa wektorów.
9. Definicja podprzestrzeni przestrzeni liniowej. Podać przykład. Sprawdzić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$

10. Wektory liniowo zależne i liniowo niezależne. Definicja i twierdzenie podające warunek jej równoważny. Podać przykłady. Sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne.

11. Definicja bazy i wymiaru przestrzeni i podprzestrzeni. Podać przykłady. Sprawdzić, czy dany zbiór wektorów jest bazą.

12. Suma i część wspólna podprzestrzeni liniowych. Związek pomiędzy ich wymiarami.

13. Definicja macierzy. Działania na macierzach. Rozstrzygnąć, czy można wykonać dane działanie. Wykonać, jeśli jest to możliwe.

14. Przedstawienie iloczynu macierzy w postaci sumy iloczynów kolumn przez wiersze.

15. Transpozycja macierzy. Wzór na transpozycję iloczynu macierzy. Definicja macierzy symetrycznej. Sprawdzić, czy dany wzór jest prawdziwy.

16. Przestrzenie wierszy i kolumn macierzy oraz ich wymiary. Rząd macierzy i metoda eliminacji Gaussa jego wyznaczania. Wyznaczyć rząd danej macierzy.

17. Postać schodkowa i zredukowana postać schodkowa. Wyznaczyć dla danej macierzy.

18. Rozkład $A = CR$ macierzy, gdzie kolumny macierzy $C$ są bazą przestrzeni kolumn macierzy $A$, a $R$ jest zredukowaną macierzą schodkową.

19. Macierze elementarne i macierze permutacji oraz ich związki z operacjami na wierszach i kolumnach macierzy.

20. Rozkład macierzy $A = LU$ na iloczyn macierzy trójkątnej dolnej i trójkątnej górnej. Wyznaczyć dla danej macierzy.

21. Indukcyjna definicja wyznacznika. Rozwinięcie i twierdzenie Laplace'a. Zastosować.

22. Własności wyznacznika. Metody jego obliczania. Obliczyć wyznacznik danej macierzy.

23. Twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Sprawdzić na przykładzie.

24. Macierze osobliwe i nieosobliwe. Macierz odwrotna. Wyznaczyć macierz odwrotną danej macierzy.

25. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Zastosować do danego układu.

26. Omówić metodę eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych. Rozwiązać dany układ.

27. Układy Cramera równań linowych. Wzory Cramera. Sprawdzić, czy dany układ równań jest układem Cramera.

28. Jednorodne układy równań liniowych. Postać rozwiązania. Sprawdzić, czy rozwiązaniem danego układu jest prosta.

29. Grupa permutacji $S_n$. Permutacje parzyste i nieparzyste. Cykl i transpozycja. Rozkład permutacji na cykle rozłączne. Rozłożyć daną permutację na cykle rozłączne i określić jej znak.

30. Permutacyjna definicja wyznacznika. Określić znak danego składnika wyznacznika.

31. Definicja przekształcenia liniowego. Sprawdzić, czy dane przekształcenie jest liniowe.

32. Definicja macierzy przekształcenia liniowego. Podać macierz danego przekształcenia.

33. Jądro i obraz przekształcenia liniowego. Związek pomiędzy ich wymiarami. Wyznaczyć jądro i obraz danego przekształcenia.

34. Izomorfizm i automorfizm liniowy, jego macierz, jądro i obraz. Grupa $GL(n, \mathbb{R})$. Sprawdzić, czy dane przekształcenie jest automorfizmem.

35. Definicja podprzestrzeni niezmienniczej przekształcenia liniowego. Sprawdzić, czy dana jednowymiarowa podprzestrzeń jest niezmiennicza.

36. Definicja wektora własnego i wartości własnej przekształcenia liniowego. Sposób ich wyznaczania. Wyznaczyć dla danego przekształcenia.

37. Twierdzenie o liniowej niezależności wektorów własnych. Postać przekształcenia liniowego w bazie wektorów własnych. Sprawdzić, czy dane przekształcenie ma bazę wektorów własnych.

38. Definicja macierzy przejścia z bazy kanonicznej do dowolnej bazy. Związek między macierzami przekształcenia w różnych bazach. Wyznaczyć macierz przejścia z bazy kanonicznej do danej.

39. Definicja macierzy podobnych. Warunki konieczne podobieństwa macierzy. Sprawdzić, czy dane macierze są podobne.

40. Definicja macierzy diagonalizowalnej. Związek z bazą wektorów własnych. Rozkład $A = P\Lambda P^{-1}$, gdzie $\Lambda$ jest macierzą diagonalną. Sprawdzić, czy dana macierz jest diagonalizowalna.

41. Iloczyn skalarny i norma wektora. Definicja wektorów ortogonalnych i kąta pomiędzy wektorami.

42. Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni. Iloczyn wektorowy w $E^3$ i jego zastosowania.

43. Rzuty ortogonalne na podprzestrzenie i ich macierze. Wyznaczyć dla danej podprzestrzeni.

44. Najlepsze przybliżone rozwiązanie układu równań. Równanie normalne i metoda najmniejszych kwadratów. Zastosować dla danego sprzecznego układu równań.

45. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do wyznaczania prostej regresji.

46. Ortogonalna baza przestrzeni i podprzestrzeni. Omówić metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta i zastosować do danego układu wektorów.

47. Definicja przekształcenia i macierzy ortogonalnej. Podać przykład w $\mathbb{E}^2$ i w $\mathbb{E}^3$. Grupy $O(n)$ i $SO(n)$.

48. Twierdzenie spektralne dla rzeczywistych macierzy symetrycznych. Rozkład $A = Q\Lambda Q^T$ i rozkład spektralny. Wyznaczyć dla danej macierzy symetrycznej $A_{2\times 2}$.

49. Rozkład Choleskiego dodatnio określonych macierzy symetrycznych.

50. Rokład SVD ($A = U\Sigma V^T$). Wartości i wektory osobliwe. Sposób wyznaczania.