

Lista całek z funkcji elementarnych i inne przydatne wzory

Lista całek funkcji elementarnych

- $\int 0 dx = C,$
- $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ dla $r \neq -1,$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
- $\int e^x dx = e^x + C,$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ dla $0 < a \neq 1,$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
- $\int \cos x dx = \sin x + C,$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C,$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$

Wzór na całkowanie przez części

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przydatne wzory trygonometryczne

- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x.$

Ważne całki z niewymiernościami

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x + \sqrt{x^2+k}| + C;$
- $\int \sqrt{x^2+k} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+k} + k \ln|x + \sqrt{x^2+k}| \right] + C;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$
- $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right] + C.$

Przydatne całki z wyrażeń wymiernych

Zakładamy, że $a > 0.$

- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$
- $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right) + C.$