Lista zadań nr 3 z analizy matematycznej. Biotechnologia.

1. Wyznaczyć różniczki danych funkcji w danych punktach i wykorzystać je do obliczenia przybliżonych wartości danych wyrażeń:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; $(x_0,y_0)=(3,4)$; $\sqrt{(2,98)^2+(4,03)^2}\approx ...$;

   (b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$; $(x_0,y_0)=(2,2)$; $\sqrt[3]{(1,94)^2+(2,03)^2}\approx ....$

2. Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h=60$ cm, $r=30$ cm. Z jaką dokładnością można wyznaczyć jego objętość.

3. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y)=xy$ w dowolnym punkcie. Dla punktu $(1,1)$ wyznaczyć pochodne w kierunku gradientu oraz wersorów $[\frac{4}{5},\frac{3}{5}]$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

4. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji:

   (a) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-14y$; (b) $f(x,y)=x^2+y^3+2x-12y+14$; (c) $f(x,y)=(2x+y^2)e^x$;
   (d) $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$; (e) $f(x,y)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$.

5. Rozwiązać dane równania o zmiennych rozdzielonych :

   (a) $y'=\dfrac{-x}{y}$; (b) $e^y y'=x+e^x$; (c) $y'=1+x+y+xy$.

6. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych:

   (a) $y'=\dfrac{-x}{y}$, $y(3)=4$;

   (b) $x(y+1)y'=y$, $y(e)=1$;

   (c) $y'=y^2(1+x^2)$, $y(0)=-2$.

7. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe jednorodne:

   (a) $y'-(x+1)y=0$; (b) $xy'+5y=0$; (c) $(1+x^2)y'+9y=0$.

8. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne metodą uzmienniania stałej:

   (a) $y'+2y=e^{3x}$; (b) $y'+2xy=x$; (c) $xy'-2y=4x^4$.

9. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych liniowych:

   (a) $y'-(x+1)y=0$, $y(0)=1$;

   (b) $y'-3x^2y=0$, $y(1)=1$;

   (c) $y'+y\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=0$.

10. Rozwiązać dane zagadnienia początkowe, w których t jest zmienną niezależną, $x=x(t)$ jest funkcją zmiennej t i $\dot{x}$ oznacza pochodną funkcji $x(t)$:

    (a) $\dot{x}=\dfrac{x}{t}$, $x(1)=2$;

    (b) $\dot{x}-x=1$, $x(0)=3$;

    (c) $\dot{x}+\dfrac{x}{t}=t$, $x(-1)=1$.