Równanie Malthusa (Thomas Malthus 1766-1834)

Jeden z modeli wzrostu populacji (np. bakterii pasożytujących we krwi, prątków gruźlicy, itp) zakłada, że tempo jej przyrostu jest wprost proporcjonalne do liczby osobników.

$$\dot{N}(t) = rN(t),$$

gdzie:

- zmienną t jest czas,
- funkcja $N(t)$ to wielkość populacji (lub jej gęstość) w chwili t,
- $\dot{N}(t)$ to pochodna funkcji $N(t)$ wględem czasu (czyli prędkość jej wzrostu),
- r to współczynnik proporcjonalności, który można wyznaczyć empirycznie.
- Równanie to spełnia każda funkcja postaci $N(t) = Ce^{rt}$.
- Jeśli założymy, że w chwili początkowej t_0, wielkość populacji jest równa N_0, to dostajemy rozwiązanie postaci:

  $$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}.$$

Równanie zagłady (Heintz von Foerster 1911-2002)

Jeśli założymy, że tempo przyrostu jest wprost proporcjonalne do większej od 1 potęgi liczby osobników, to populacja w skończonym okresie czasu „osiągnie” ∞.

Dla potęgi drugiej dostalibyśmy równanie :

$$\dot{N}(t) = k[N(t)]^2,$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności.

Spełnia je każda funkcja postaci:

$$N(t) = \frac{1}{C - kt}.$$

Doomsday: Friday, November 13, AD 2026, H Foerster, PM Mora, LW Amiot, Science 132, s. 1291–1295, 1960.

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego, to:

równanie

$$F(x, y, y') = 0,$$

w którym występuje zmienna x jej funkcja $y(x)$ i pochodna tej funkcji $y'(x)$. Dla badania zmienności w czasie przyjmuje się zwykle zmienną t, jej funkcję: np. $x = x(t)$ i jej pochodną $\dot{x} = \dot{x}(t)$.

$$F(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Rozwiązaniem (*całką szczególną*) równania nazywamy każdą funkcję, która spełnia równanie dla wszystkich wartości zmiennej z pewnego przedziału. *Całką ogólną* nazywamy (jednoparametrową) rodzinę rozwiązań $y = y(x, C)$. *Krzywa całkowa* to wykres dowolnego rozwiązania. *Warunki początkowe* $y_0 = y(x_0)$ pozwalają wybrać całkę szczególną z rozwiązania ogólnego.

Równania o zmiennych rozdzielonych:

$$p(y)y' = q(x) \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli $p(y)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $y = y_0$, przy czym $p(y_0) \neq 0$, a $q(x)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $x = x_0$, to istnieje takie otoczenie punktu (x_0, y_0), że przez każdy punkt tego otoczenia przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (1) określona równaniem $y = f(x)$, przy czym funkcja f ma ciągłą pochodną. Funkcja ta jest dana w postaci uwikłanej równaniem*

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx.$$

Przykłady:

1. $y' = \dfrac{1}{9 + x^2}$;
2. $y' = ay$;
3. $\dot{N} = kN^2$;
4. $\dot{x} = kx^{1,1}$
5. $\dfrac{y'}{y} = \mathrm{ctg} x$;
6. $y' + 4x^3y^2 = 0$;
7. Znaleźć całki szczególne danych równań spełniające dane warunki początkowe:

(a) $y' + y = 0$; $\quad y(1) = 1$;

(b) $y' = e^{x+y}$; $\quad y(0) = 0$;

8. (Równanie logistyczne) Znaleźć krzywą całkową równania

$$y' = y(1 - y)$$

przechodzącą przez punkt $(0, \frac{1}{2})$.

Równanie logistyczne (Pierre Francois Verhulst 1804-1849)

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

gdzie:

- zmienną t jest czas,
- funkcja $N(t)$ to wielkość populacji (lub jej gęstość) w chwili t,
- r to współczynnik proporcjonalności (tempa wzrostu),
- K to *pojemność siedliska* (*środowiska*), czyli liczebność populacji, przy której tempo wzrostu spada do zera.
- Przy warunku początkowym $N(t_0) = N_0$ dostajemy:

$$N(t) = \frac{N_0 e^{r(t-t_0)}}{1 + \frac{N_0}{K}(e^{r(t-t_0)} - 1)}.$$

Równania różniczkowe liniowe jednorodne (RRLJ):

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, które zawsze spełnia funkcja $y(x) = 0$. Dla $y \neq 0$ można je zapisać:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -p(x).$$

Całka ogólna równania (2) ma postać:

$$y = Ce^{-P(x)}$$

gdzie $P(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $p(x)$.

Przykład: 1. $y' = \dfrac{2x-1}{x^2}y.$

Równania różniczkowe liniowe niejednorodne (RRLN):

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

Metoda uzmienniania stałej:

1. Znajdujemy całkę ogólną $y = Ce^{-P(x)}$ (RRLJ) powstałego z (RRLN) po zastąpieniu funkcji $q(x)$ stałą 0.
2. Całka ogólna (RRLN) ma postać

$$y = C(x)e^{-P(x)} \tag{4}$$

   (zamiast stałej C bierzemy funkcję $C(x)$).

3. Równanie na funkcję $C(x)$ otrzymujemy po wstawieniu do (3) funkcji (4) i jej pochodnej.

4. Z kształtu równania wynika, że $C(x)$ ulega skróceniu i w równaniu pozostaje tylko $C'(x)$!

5. Ostatecznie otrzymujemy całkę ogólną postaci: $y = (C(x) + C_1)e^{-P(x)}$.

Przykłady:

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

2. $xy' - 2y = x^3 \cos x$;

3. Znaleźć krzywą całkową równania

$$y' - 2y + 4 = 0$$

przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.