Def. 1. Funkcje, których dziedzinami są podzbiory płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ lub przestrzeni $\mathbb{R}^3$ a przeciwdziedziną $\mathbb{R}$ nazywamy odpowiednio funkcjami dwóch lub trzech zmiennych. Wartości tych funkcji oznaczamy odpowiednio $f(x, y)$ i $f(x, y, z)$.

Przykład: 1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Def. 2. Wykresem funkcji f dwóch zmiennych nazywamy zbiór:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = f(x, y).$$

Przykład: 2.

1. Płaszczyzna $z = Ax + By + C$.
2. Paraboloida obrotowa $z = x^2 + y^2$.
3. Paraboloida hiperboliczna $z = x^2 - y^2$.
4. Walec paraboliczny $z = y^2$.

Def. 3 (Granica właściwa ciągu punktów)**.** Mówimy, że ciąg (P_n) punktów płaszczyzny (przestrzeni) jest zbieżny do granicy P, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |P_n P| < \varepsilon.$$

Def. 4 (Granica właściwa funkcji według Heinego)**.** Mówimy, że funkcja dwóch zmiennych f określona w sąsiedztwie punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ zbiega do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do (x_0, y_0) ciągu $((x_n, y_n))$ punktów sąsiedztwa punktu (x_0, y_0), ciąg wartości $(f(x_n, y_n))$ zbiega do g.

Def. 5. Funkcja f jest ciągła w (x_0, y_0), gdy $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Def. 6. Pochodne cząstkowe funkcji f dwóch zmiennych w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

Jeżeli f ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi funkcji funkcji f w zbiorze D. Stosujemy również oznaczenia f_x, f_y.

Przykład: 3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe danych funkcji dwóch i trzech zmiennych: a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, b) $f(x, y) = y^2$, c) $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, d) $f(x, y) = x^y$, e) $f(x, y, z) = y - \sqrt{x^2 + z^3}$.

Def. 7. Jeżeli f ma pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu (x_0, y_0), to pochodne drugiego rzędu w tym punkcie określamy wzorami:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x}))(x_0, y_0),$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}))(x_0, y_0),$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x}))(x_0, y_0),$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) := (\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y}))(x_0, y_0).$

Analogicznie jak dla pochodnych pierwszego rzędu określamy funkcje pochodnych drugiego rzędu w zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^2$. Stosujemy również oznaczenia f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} i f_{yy}.

Przykład: 4. Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

1. $f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^4$,
2. $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$,
3. $f(x, y) = \cos(x + 2y)$

Przykład: 5. Wyznaczyć pochodne drugiego rzędu f_{xz} i f_{zx} oraz pochodną trzeciego rzędu f_{yxz} funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$.

Tw. 1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)**.** *Jeżeli pochodne cząstkowe* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *i* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *są ciągłe w punkcie* (x_0, y_0)*, to są równe.*

Def. 8. Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), gdy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Def. 9. *Różniczką* w punkcie (x_0, y_0) funkcji f, posiadającej pochodne cząstkowe w tym punkcie, nazywamy następującą funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych Δx, Δy:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Wn. 1. *Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), to*

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

przy czym $\Delta f - df$ zbiega do 0 szybciej niż $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Przykład: 6. Napisać różniczki podanych funkcji we wskazanych punktach:

1. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ w $(x_0,y_0)=(-2,2)$,
2. $f(x,y)=x^y$, w $(x_0,y_0)=(1,3)$.
3. Zastosować do wyznaczenia wartości przybliżonych wyrażeń: $\sqrt[3]{(-1,98)^2+(2,03)^2}$ i $(1,04)^{3,01}$.

Def. 10. Pochodną funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wektora jednostkowego (czyli wersora) $\overrightarrow{v}=[v_1,v_2]$ określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}:=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

Def. 11. *Gradientem* funkcji f w punkcie (x_0,y_0) nazywamy wektor:

$$\nabla f(x_0,y_0)=\mathbf{grad}f(x_0,y_0):=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right].$$

Tw. 2. *Jeśli f ma w (x_0,y_0) ciągłe pochodne cząstkowe, to* $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}=\nabla f(x_0,y_0)\circ\overrightarrow{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2$.

Wn.1 Pochodne cząstkowe są pochodnymi w kierunku wersorów $[1,0]$ i $[0,1]$.

Wn.2 Gradient jest kierunkiem najszybszej zmiany wartości funkcji i jest prostopadły do poziomic wykresu funkcji.

Przykład: 7. Wyznaczyć gradient funkcji $f(x,y)=x^2+y^2$ w dowolnym punkcie oraz poziomicę odpowiadającą tej wartości funkcji. Dla punktu $(3,4)$ wyznaczyć dodatkowo pochodne w kierunku gradientu oraz wersorów $[-\frac{4}{5},\frac{3}{5}]$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Tw. 3 (Warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych)**.** *Niech f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2 w otoczeniu punktu (x_0,y_0) oraz niech*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,$
2. $\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{bmatrix}>0.$

Wówczas f ma w (x_0,y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to minimum, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$ *a maksimum, gdy* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$. *Jeśli wyznacznik z (2) <0, to f nie ma ekstremum w (x_0,y_0).*

Przykład: 8. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$.