Całka oznaczona Riemanna

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (gdzie $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$) – podział przedziału $[a,b]$; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – długość i-tego odcinka podziału; x_i^*- punkty pośrednie ($x_i^* \in [x_i, x_{i-1}]$); $\delta(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_i : \ 1 \le i \le n\}$ – średnica podziału

Def. 1.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i,$$

o ile granica istnieje i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ oraz wyboru punktów pośrednich x_i^*.

Dodatkowo przyjmuje się:

$$\int_a^a f(x)dx := 0; \qquad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

$\int_a^b f(x)dx$ jest równa polu obszaru zawartego pomiędzy osią Ox i wykresem funkcji $y = f(x)$ na $[a,b]$, z uwzględnieniem znaku w zależności od położenia obszaru względem osi Ox.Taki obszar nazywamy *trapezem krzywoliniowym.*

Def. 2. Funkcję, dla której istnieje całka Riemanna na $[a,b]$ nazywamy funkcją *całkowalną* na $[a,b]$.

Uwaga 1. Nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna, np. funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & dla \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest całkowalna na żadnym przedziale $[a,b]$.

Tw. 1. *Jeśli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a,b]$ i ma w tym przedziale skończoną ilość punktów nieciągłości I-go rodzaju, to jest całkowalna.*

Funkcja górnej granicy całkowania

Def. 3. Niech f będzie całkowalna na $[a,b]$. Funkcję

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

określoną na przedziale $[a,b]$ nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania.*

Tw. 2 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego).

1. *Funkcja górnej granicy całkowania jest ciągła.*

2. *Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to funkcja górnej granicy całkowania*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$.

Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego, wzór Newtona-Leibnitza.

Tw. 3 (Newtona-Leibnitza)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykłady: 1. 1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, prostą $x = 3$ i wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$.

3. Wyznaczyć funkcje górnej granicy całkowania dla funkcji $f(x) = \mathrm{sign}x$ i $g(x) = |x|$ na przedziale $[-1, 1]$.

Tw. 4. *Niech funkcje f, g będą całkowalne na $[a.b]$. Wówczas:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$

2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *dla dowolnego $c \in [a,b]$,*

4. *Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$, to* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Przykłady: 2. 1. $\displaystyle\int_0^2 |1-x^2|dx$, 2. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx > \frac{e-1}{e}$

Podstawienie w całce oznaczonej

Tw. 5. *Jeżeli:*

1. *$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ ma ciągłą pochodną na $[\alpha, \beta]$,*

2. *$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,*

3. *funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Przykłady: 3. 1. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

2. $\int_{-2}^{1} x\sqrt{3+x}dx$

Def. 4. Wartością średnią funkcji f całkowalnej na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Tw. 6 (Całkowe o wartości średniej)**.** *Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to istnieje $c\in[a,b]$, taka że*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Przykład: 1. Znaleźć punkt $c\in[1,4]$, w którym funkcja $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ osiąga wartość średnią.

- Jeżeli f ma ciągłą pochodną na $[a,b]$, to długość łuku krzywej $\Gamma=\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$ wyraża się wzorem:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Przykład: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ dla $x\in[0,\frac{1}{2}]$.

- Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu dokoła Ox obszaru ograniczonego osią Ox i wykresem funkcji f całkowalnej na $[a,b]$:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Przykład: $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$.

- Pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu dokoła Ox wykresu funkcji f (o ciągłej pochodnej) dla $x\in[a,b]$:

$$|\Sigma| = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Przykład: $f(x)=x^3$, $x\in[0,1]$.

Całki niewłaściwe

Def. 5. Dla f określonej na $[a,\infty]$ lub $[-\infty,b]$ całkę określamy wzorem:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

lub odpowiednio

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{b} f(x)dx.$$

Ponadto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx.$$

Przykłady: 4. 1. $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

2. $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

Wn. 1. $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ *jest zbieżna gdy* $p > 1$ *i rozbieżna gdy* $p \leq 1$.

Def. 6. Dla f ciągłej i nieograniczonej na $[a, b)$ lub $(a, b]$ całkę określamy wzorem:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

lub odpowiednio

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{s\to a^+} \int_{s}^{b} f(x)dx.$$

Wn. 2. $\displaystyle\int_{o}^{b} \frac{dx}{x^p}$ *jest zbieżna gdy* $p < 1$ *i rozbieżna gdy* $p \geq 1$.

Przykład: 2. $\int_0^e \ln x dx$.