Def. 1. *Funkcją pierwotną* funkcji f na danym przedziale I nazywamy dowolną funkcję F, która dla $x \in I$ spełnia warunek

$$F'(x) = f(x).$$

Przykład: 1. Funkcje $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 1$, $H(x) = x^2 + 10$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 2x$. Funkcja $\mathrm{sgn}x$ nie ma funkcji pierwotnej na żadnym przedziale zawierającym 0.

Tw. 1. *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas:*

1. *$G(x) = F(x) + C$ jest funkcją pierwotną funkcji f na I dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$,*
2. *Każdą funkcję pierwotną można zapisać w postaci $F(x) + C$.*

Tw. 2. *Każda funkcja ciągła na I ma funkcję pierwotną na I.*

Uwaga 1. Nie każda funkcja pierwotna danej funkcji elementarnej jest elementarna! Przykładowo: e^{x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1+x^3}$, $\cos x^2$.

Def. 2. *Całką nieoznaczoną* funkcji f nazywamy zbiór funkcji:

$$\int f(x)dx := \{F(x) + C : \ C \in \mathbb{R}\},$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną. Piszemy krótko: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Wn. 1. 1. *$[\int f(x)dx]' = f(x)$,*

2. *$\int f'(x)dx = f(x) + C$.*

Lista całek funkcji elementarnych

1. $\int 0dx = C$
2. $\displaystyle\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ dla $r \neq -1$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ dla $0 < a \neq 1$; ($\int e^x dx = e^x + C$)
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x = \sin x + C$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Tw. 3. *Jeżeli f i g mają funkcje pierwotne, to*

1. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

2. $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

Przykłady: 1. Wyznaczyć całki:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}dx$

2. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x dx$

3. $\displaystyle\int 3^x 5^{-2x} dx$

Całkowanie przez części

Tw. 4 (O całkowaniu przez części)**.** *Jeżeli f i g mają ciągłe pochodne, to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykłady: 2. 1. $\displaystyle\int x\sin x dx$

2. $\displaystyle\int \ln x dx$

3. $\displaystyle\int e^x \sin x dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Całkowanie przez podstawienie

Tw. 5 (O całkowaniu przez podstawienie)**.**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{gdzie } u = g(x).$$

(O f i g' zakładamy, że są ciągłe.)

Wn. 2. *Jeżeli* $\int f(x)dx = F(x) + C$ *i* $a \neq 0$, *to*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Wn. 3.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Przykłady: 3. 1. $\int (2x-5)^7 dx$

2. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

3. $\int \cos^3 x dx$

4. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

5. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}] + C$

6. $\int \cos^4 x dx$

Przydatne wzory trygonometryczne

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Ułamki proste

$$\mathrm{I}: \ \frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \mathrm{II}: \ \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^n} \quad (\Delta < 0)$$

Tw. 6 (O rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)**.** *Każda funkcja wymierna właściwa rozkłada się jednoznacznie na sumę ułamków prostych.Jeżeli w mianowniku występuje czynnik* $(x-a)^n$, *to w rozkładzie należy uwzględnić:*

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Jeżeli w mianowniku występuje czynnik $(px^2+qx+r)^n$, to w rozkładzie należy uwzględnić:

$$\frac{B_1x+C_1}{px^2+qx+r}+\frac{B_2x+C_2}{(px^2+qx+r)^2}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{(px^2+qx+r)^n}.$$

Przykłady: 4. 1. $\displaystyle\int\frac{A}{x+a}dx=A\ln|x+a|+C;$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x+a)^n}dx=-\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}}+C;$

3. $\displaystyle\int\frac{4x}{x^2+2x+5}dx;$

4. $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}dx;$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\ln\sqrt{\left|\frac{a+x}{a-x}\right|}+C.$

Ważne całki z niewymiernościami

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C$

2. $\displaystyle\int\sqrt{x^2+k}dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+k}+k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|]+C$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

4. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}]+C$

Przykłady: 5. 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}};$

2. $\displaystyle\int\sqrt{x^2+8x+3}dx;$

3. $\displaystyle\int\sqrt{-x^2+4x}dx.$