Lista nr 4 zadań z matematyki. Biotechnologia.

1. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(x\,\mathrm{sgn}x)$, d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$.

2. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25^x-9^x}{5^x-3^x}$, c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$.

3. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x}{2})}{e^{\frac{x}{3}}-1}$.

4. Znaleźć asymptoty podanych funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$, c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-2}$, d) $f(x)=2^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$, f) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

5. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić rodzaje nieciągłości w tych punktach:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x^2}{|x-1|} & \text{dla } x\neq 1\\ 1 & \text{dla } x=1\end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{dla } x\neq 1,\\ 1 & \text{dla } x=1,\end{cases}$; c) $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|+x}{x^2} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$.

6. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $y=x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^4}$, b) $y=\dfrac{x-x^2+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$, c) $y=x^3\cdot\sin x$, d) $y=(x^2-2x)\cdot 2^x$, e) $y=\arcsin x\cdot\log_2 x$,

f) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+1}$, g) $y=\dfrac{e^x+\sin x}{1+\mathrm{tg}x}$, h) $y=\sin 2x$, i) $y=\cos^2 x$, j) $y=\arccos\sqrt{x}$, k) $y=e^{\mathrm{arctg}(3x)}$,

l) $y=\ln\mathrm{tg}\frac{x}{3}$, m) $y=\ln(e^x+e^{-2x})$, n) $y=e^{x\ln x}$, o) $y=\sin^7\dfrac{2^x}{e^{3x}+1}$, p) $y=\ln\sqrt{x\sin x}$.

7. Napisać równanie stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x)=x^2$, $(1,f(1))$; b) $f(x)=\arcsin x$, $(0,f(0))$; c) $f(x)=\ln(x^2+e)$, $(0,f(0))$;

d) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $((1),f(1))$; e) $f(x)=(x+1)\sqrt{3-x}$, $(-1,f(-1))$.

8. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne właściwe lub niewłaściwe we wskazanych punktach, wyznaczając pochodne lewostronne i prawostronne:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla } x\leqslant 1,\\ \sqrt{x} & \text{dla } x>1,\end{cases}$, $x_0=1$, b) $g(x)=\sqrt[5]{x}$, $x_0=0$; c) $h(x)=\sqrt[5]{x^2}$, $x_0=0$.

9. Korzystając z różniczek odpowiednich funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\sqrt[3]{7{,}94}$, b) $e^{0{,}04}$, c) $\dfrac{1}{\sqrt{3{,}92}}$, d) $\ln 102-\ln 100$.

10. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć punkty, w których funkcja osiąga swoją średnią prędkość wzrostu:
a) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,4]$; b) $g(x)=\ln x$, $[1,e]$.

11. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^5-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+4x)}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2^x-2^{2-x}}{(x-1)^2}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

12. Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne podanych funkcji:
a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$, b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, d) $f(x) = x \ln x$,
e) $f(x) = x + \sin x$, f) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, g) $f(x) = x^2 e^{-x}$, h) $f(x) = 2\mathrm{arctg}x - \ln(1+x^2)$.

13. Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $[-2, 5]$; b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, $[0, 3]$;
c) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$, $[1, 4]$; d) $g(x) = x^2 \ln x$, $[1, e]$.

14. Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny x% tlenu i $(100 - x)$% azotu w temperaturze 1600°C i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$y = \sqrt{Kx(100-x)} - 25K,$$

gdzie K jest stałą równowagi reakcji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Obliczyć, przy jakiej procentowej zawartości tlenu x w mieszaninie wydajność tlenku azotu NO będzie największa.

15. Wyznaczyć wymiary odkrytego zbiornika oczyszczalni ścieków o dnie w kształcie koła i pojemności $1000\pi\ m^3$ tak, żeby na wykonanie jego ścian zużyć najmniejszą ilość materiału.

16. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:
a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x$, b) $g(x) = x^2 + 8\ln x$, c) $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$,
d) $p(x) = x + \sin x$, e) $q(x) = x^2 \ln x$, f) $r(x) = (1 + x^2)e^x$,

17. Sporządzić wykres funkcji ciągłej na podstawie następujących informacji:

a)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
y"	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		0		1		0	

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-2) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x+2 = 0$;

b)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y"	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		0		$\times$		1	

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+1) = 0$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x + 2 = 0$;

c)

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
y"	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y		1		0		-1	

$f(2) = 0$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x + 6 = 0$.

18. Wyznaczyć pięć pierwszych pochodnych podanych funkcji:

a) $f(x) = \sin 2x$, b) $f(x) = (1 + 3x)^5$, c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $g(x) = \ln(1 + x)$.

Dla ostatniej z funkcji napisać wzór Maclaurina dla $n = 5$. Obliczyć $\ln(1, 2)$ korzystając z pierwszych czterech składników. Czy błąd jest większy niż $0,001$?