

## Lista nr 3 zadań z matematyki. Biotechnologia.

1. Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone i znaleźć ich kresy:

$$A = \{(-3)^n : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{2^z : z \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \left\{\frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$E = \{3 - |x| : x \in \mathbb{R}\}, \quad F = \left\{\frac{1}{x} : x \in (0, 1]\right\}, \quad G = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}, \quad H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0\}.$$

2. Dla każdego z danych ciągów wskazać indeks  $n_0$ , dla którego wyrazy o indeksach  $n > n_0$  spełniają daną nierówność. Jakie są granice tych ciągów?

a)  $a_n = \frac{2}{n}$ ,  $a_n < 0,00001$ ; b)  $b_n = 2^n$ ,  $b_n > 1000$ ; c)  $c_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ,  $|c_n - 1| < 0,001$ .

3. Wyznaczyć granice ciągów:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 7}{3n^2 + 5n - 6}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + 4)^2}{2n + 13}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(3n+1)^2}$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 3)^2}{n^4 - 9}$ ,

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 8^n + 11}{3 \cdot 8^n - 1}$ , f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 2}{2 - 7^{n-1}}$ , g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 5}}$ , h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ ,

4. Korzystając z twierdzeń o granicach niewłaściwych wyznaczyć:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot n$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$ , f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  
g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2 + \frac{1}{n}}$ .

5. Korzystając ze zbieżności odpowiednich ciągów do liczby  $e$  obliczyć podane granice:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{2n}$ , c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+2}$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$ .

6. Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego wyznaczyć sumy danych szeregów:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{4^n}$ , b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 1}{6^n}$ , c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3 \cdot 4^n}$ , d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} + 5 \cdot 3^n}{5^{n+1}}$ .

7. Obliczyć

a)  $\log_2 8\sqrt{2}$ , b)  $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$ , c)  $\log_{\frac{1}{3}} 81\sqrt{3}$ , d)  $\ln \sqrt[4]{e}$ , e)  $3^{2+\log_3 4}$ , f)  $10^{2 \log \sqrt{3}}$ , g)  $2^{5 - \frac{1}{3} \log_2 27}$ , h)  $e^{2 \ln 2 + \ln 3}$ ,  
i)  $\log_2 3 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6 8$ , j)  $\ln \sqrt{2} \cdot \log_2 \sqrt{e}$ .

8. Rozwiązać nierówności:

a)  $\ln(x^2 + 1) > \ln(3x - 1)$ , b)  $\log_{\frac{1}{5}}(2x + 1) < \log_{\frac{1}{5}}(4 - x^2)$ .

9. Określić funkcje złożone  $f \circ g$  i  $g \circ f$  dla:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \ln x$ ; b)  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = 4^x$ ; c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 1 + x^2$ .

10. Określić dziedziny naturalne i zbiory wartości danych funkcji złożonych:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ , b)  $g(x) = \sqrt{-x^2}$ , c)  $h(x) = \ln(x^2 - 4)$ , d)  $p(x) = \log_2 |\sin x|$ , e)  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ,

f)  $g(x) = \log_3(-x^2 + 4x - 3)$ , g)  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

11. Korzystając definicji Heinego granicy funkcji wyznaczyć:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3 + 2x^3)$ , b)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2 - 9}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^3}{x^3 + 1}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ .