Lista nr 2 zadań z matematyki. Biotechnologia.

1. Wykonać działania z iloczynem skalarnym:

a) $[1,2,3]\circ[3,2,1]$; b) $[1,2,-2]\circ[2,1,2]$; c) $[1,2,1,2]\circ[1,-1,1,-1]$; d) $[1,2,-2]\circ[1,2,-2]$.

W którym podpunkcie wektory są prostopadłe? Jaka jest długość wektora $[1,2,-2]$?

2. Obliczyć:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Dla macierzy $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A^T\cdot B^T$ i $B^T\cdot A^T$.

4. Dane są macierze: $A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Rozstrzygnąć, które z działań są wykonalne: $A\cdot B$, $A^T\cdot B$, $B\cdot A$, $B^T\cdot A$, A^2, $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$, B^2, $B^T\cdot B$. Wykonać te, które można.

5. Obliczyć rzędy macierzy stosując definicję i metodę eliminacji Gaussa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ -5 & -5 & -20 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -3 & 9 & 0 \\ 2 & 17 & 9 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Badając rzędy odpowiednich macierzy sprawdzić czy dane wektory są liniowo zależne:

a) $[1,2,3,4],[1,2,1,2],[4,3,2,1],[2,1,2,1]$; b) $[2,3,1,2,3],[1,3,2,1,3],[0,1,1,0,1]$.

c) $[1,1,2,2],[1,-1,1,-1],[3,1,5,5]$.

7. Obliczyć podane wyznaczniki (w d), e) wyciągnąć stałe przed wyznacznik):

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -12 & 6 & 0 \\ 3 & -8 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 12 & 24 & 12 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Obliczyć wyznaczniki stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

9. Obliczyć metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

10. Wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

11. Wyznaczyć macierze X i Y z równań: $X \cdot A + B = C$ i $DY = EY + F$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

12. Określić ilość rozwiązań układu równań mając dane: ilość niewiadomych n, rząd macierzy układu rA i rząd macierzy uzupełnionej rU. W przypadku nieskończonych zbiorów rozwiązań określić od ilu parametrów one zależą.

a) $n = 3$, $rA = 2$, $rU = 3$; b) $n = 4$, $rA = rU = 3$; c) $n = 3 = rA = rU$; d) $n = 3$, $rA = rU = 1$.

13. Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego rozwiązać podane układy metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + z = 5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 6y + 3z = -12 \end{cases}$.

14. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.