Tw. 1. *Jeżeli funkcja f spełnia dla wszystkich x pewnego przedziału warunek:*

1. $f'(x) = 0$, *to jest stała;*
2. $f'(x) > 0$, *to jest rosnąca;*
3. $f'(x) \geq 0$, *to jest niemalejąca;*
4. $f'(x) < 0$, *to jest malejąca;*
5. $f'(x) \leq 0$, *to jest nierosnąca; na tym przedziale.*

Def. 1. Funkcja f ma w punkcie x_0 *minimum lokalne* (odp. *minimum lokalne właściwe*), gdy $f(x) \geq f(x_0)$ (odp. $f(x) > f(x_0)$) dla wszystkich punktów x pewnego sąsiedztwa punktu x_0. Analogicznie określamy *maksimum lokalne* i *maksimum lokalne właściwe*. Maksima i minima lokalne nazywamy *ekstremami* lokalnymi.

Tw. 2 (Fermata)**.** *Jeżeli f jest różniczkowalna w x_0 i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to*

$$f'(x_0) = 0.$$

Uwaga 1. Funkcja może mieć ekstremum tylko w punktach, w których pochodna zeruje się lub nie istnieje. Ze znikania pochodnej $f'(x_0)$ nie wynika, że f ma w tym punkcie ekstremum.

Tw. 3 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum I)**.** *Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz*

1. $f'(x) < 0$ *w lewym i* $f'(x) > 0$ *w prawym sąsiedztwie punktu* x_0, *to* f *ma minimum lokalne właściwe w* x_0,
2. $f'(x) > 0$ *w lewym i* $f'(x) < 0$ *w prawym sąsiedztwie punktu* x_0, *to* f *ma maximum lokalne właściwe w* x_0.

Wyznaczanie wartości największej i największej funkcji ciągłej na $[a, b]$:

Należy wyznaczyć wartości funkcji w następujących punktach:

1. końcach przedziału,
2. miejscach zerowych pochodnej,
3. punktach, w których pochodna nie istnieje.

Następnie należy wybrać z nich wartość największą i najmniejszą.

Przykłady: 1. Wyznaczyć wartości największe i namniejsze danych funkcji na danych przedziałach:

1. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ na przedziale $[1, 4]$.
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ na przedziale $[-1, 2]$.

Funkcje wypukłe i wklęsłe

Def. 2. Funkcja f jest *wypukła* na przedziale (a, b) gdy dla dowolnych trzech punktów $x_1 < x_2 < x_3$ tego przedziału zachodzi

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Jeśli nierówność jest ostra, to funkcję nazywamy *ściśle wypukłą*. Jeśli zmienimy nierówność na przeciwną, to otrzymamy definicję funkcji wklęsłej.

Wykres funkcji wypukłej pomiędzy dowolnymi dwoma punktami znajduję się pod sieczną wykresu w tych punkty.

Uwaga 2. Dla funkcji różniczkowalnych warunek ścisłej wypukłości, czy wklęsłości, można sformułować za pomocą stycznej. Dla funkcji wypukłej styczna w dowolnym punkcie przedziału leży pod wykresem, a dla wklęsłej nad wykresem.

Def. 3. Pochodną pochodnej f' funkcji f nazywamy drugą pochodną i oznaczamy f''.

$$f''(x) := f'(x).$$

Tw. 4. *Jeżeli $f"(x) > 0$ ($f"(x) < 0$) dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja jest ściśle wypukła (odpowiednio: ściśle wklęsła) na (a, b).*

Def. 4. Mówimy, że funkcja f ma w x_0 *punkt przegięcia* gdy ma w x_0 pochodną (właściwą lub niewłaściwą) i jest ściśle wypukła w prawym lub lewym sąsiedztwie x_0 a ściśle wklęsła w drugim z jednostronnych sąsiedztw.

Tw. 5 (Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeżeli f ma w x_0 punkt przegięcia i drugą pochodną, to $f"(x_0) = 0$.*

Tw. 6 (Warunek dostateczny istnienia ekstremum II)**.** *Jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz*

1. *$f"(x_0) > 0$, to f ma minimum lokalne w x_0.*
2. *$f"(x_0) < 0$, to f ma maximum lokalne w x_0.*

Tw. 7 (Warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia)**.** *Jeżeli funkcja ma pochodną $f'(x_0)$ (właściwą lub niewłaściwą) oraz $f"(x)$ ma przeciwne znaki w lewym i prawym sąsiedztwie punktu x_0, to f ma w x_0 punkt przegięcia.*

Przykład: 1. Wyznaczyć ekstrema lokalne i punkty przegięcia funkcji

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2.$$

Badanie przebiegu funkcji

1. Wyznaczenie dziedziny.
2. Ustalenie podstawowych własności:

parzystość lub nieparzystość, okresowość,

przecięcia z osiami układu współrzędnych,

ciągłość.

3. Obliczenie granic lub wartości na krańcach dziedziny. Wyznaczenie asymptot.

4. Zbadanie pierwszej pochodnej:

   wyznaczenie pochodnej i jej dziedziny,

   ustalenie przedziałów monotoniczności i ekstremów,

   obliczenie granic lub wartości pochodnych jednostronnych na krańcach dziedziny.

5. Zbadanie drugiej pochodnej:

   wyznaczenie drugiej pochodnej i jej dziedziny,

   ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości oraz punktów przegięcia,

   obliczenie wartości pierwszej pochodnej w punktach przegięcia.

Sporządzenie tabeli i wykresu

Uwaga 3. Wykonanie wykresu rozpoczynamy od naniesienia punktów szczególnych i narysowania asymptot.

Przykład: 2. Sporządzić wykres funkcji na podstawie następujących informacji:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	-1	$-$
y"	$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		-2		0		-2	

$f(-1)=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-4.$

Przykłady: 2. 1. Sporządzić wykres funkcji ciągłej na podstawie następujących informacji:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	$\times$	0
y"	$+$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$	0
y		0		2		1	

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0.$

2. Sporządzić wykres funkcji

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Def. 5. Pochodne wyższych rzędów definiujemy indukcyjnie:

1. $$f^{(1)}(x) := f'(x),$$

2. Dla $n > 1$: $$f^{(n+1)}(x) := \left(f^{(n)}\right)'(x).$$

   Stosujemy również oznaczenia

   $$f'', f''', f^{iv}, ...$$

   oraz

   $$f^{(0)}(x) := f(x).$$

Przykład: 3. Wyznaczyć wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x) = xe^x$.

Tw. 8 (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a)**.** *Jeżeli f ma ciągłą pochodną $f^{(n-1)}$ na przedziale $[x_0, x]$ oraz pochodną $f^{(n)}$ na przedziale (x_0, x), to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$, że*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Wyrażenie

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazywamy *resztą w postaci Lagrange'a* a całą resztę sumy - *wielomianem Taylora.*

Wn. 1 (Wzór Maclaurina)**.** *Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przyjmuje postać:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

Szeregi Maclaurina dla funkcji e^x, $\sin x$ i $\cos x$:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^c$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cos c$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos c$

Przykład: 4. Wyznaczyć $\cos 0,2$ z dokładnością do 10^{-4}.