Pochodna funkcji

Def. 1. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

o ile granica ta istnieje i jest właściwa. Funkcję f nazywamy wtedy *różniczkowalną*. Przy założeniu, że f jest ciągła w x_0 analogicznie określamy pochodne niewłaściwe $+\infty$ i $-\infty$. Pochodną lewostronną i prawostronną nazywamy odpowiednio:

$$f'_-(x_0) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{i} \quad f'_+(x_0) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ilorazem różnicowym nazywamy wyrażenie

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Uwaga 1. Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 oznacza się również $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$ lub $Df(x_0)$.

Uwaga 2. W definicji pochodnej niewłaściwej zakładamy dodatkowo ciągłość funkcji w punkcie x_0. Założenie, to jest zbędne dla pochodnej właściwej ponieważ z istnienia granicy właściwej

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

wynika ciągłość funkcji w punkcie x_0. W każdym przypadku zachodzi:

Twierdzenie 1. *Jeśli istnieje właściwa lub niewłaściwa pochodna $f'(x_0)$, to funkcja f jest ciągła w x_0.*

Interpretacja geometryczna i fizyczna

- Pochodna właściwa w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0.
- Jeśli $f'(x_0) = \pm\infty$, to styczna do wykresu jest prostą pionową $x = x_0$.
- Równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f różniczkowalnej w punkcie x_0:
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$
- Pochodna wyraża szybkość przyrostu funkcji w chwili x_0.
- Jeśli $s = s(t)$, jest funkcją drogi w zależności od czasu, to pochodna $s'(t_0)$ jest prędkością w chwili t_0.
- Jeśli $v = v(t)$, jest funkcją prędkości w zależności od czasu, to $v'(t_0)$ jest przyśpieszeniem w chwili t_0.

Pochodne funkcji elementarnych

1. $c' = 0$ (pochodna funkcji stałej jest równa 0),
2. $(x^r)' = rx^{r-1}$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$,
3. $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$,
4. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
5. $(a^x)' = a^x \ln a, \ (e^x)' = e^x$,
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \ (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
8. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \ (\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Def. 2. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w zbiorze* $X \subset \mathbb{R}$ gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję, która każdemu $x \in X$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$ w tym punkcie nazywamy pochodną f' na zbiorze X.

Twierdzenie 2. *Jeśli f, g są różniczkowalne w zbiorze X, to w tym zbiorze:*

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x)) \pm g'(x)$,
2. $[cf(x)]' = cf'(x)$ *dla dowolnej stałej* $c \in \mathbb{R}$,
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *o ile* $g(x) \neq 0$.

Twierdzenie 3.

1. *Jeżeli f ma pochodną właściwą w punkcie x i g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x)$, to*
$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$
2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła i ściśle monotoniczna w otoczeniu punktu x oraz ma pochodną $f'(x) \neq 0$, to*
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ gdzie } y = f(x).$$

Różniczka

Def. 3. *Różniczką* funkcji f różniczkowalnej w x_0 nazywamy funkcję df przyrostu argumentu $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Uwaga 3. Różniczka jest funkcją liniową przyrostu argumentu Δx. Jej współczynnik kierunkowy jest wartością pochodnej w ustalonym punkcie x_0.

Uwaga 4. Różniczka szybciej zbiega do przyrostu wartości funkcji $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ niż $\Delta x \to 0$.

Dokładniej:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Dlatego dla małych $\Delta x = x - x_0$ stosujemy przybliżenie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przykłady: 1. 1. Wyznaczyć różniczkę funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 8$. Wykorzystać ją do obliczenia bez kalkulatora przybliżonej wartości $\sqrt[3]{8,03}$.

2. Z jaką dokładnością wyznaczymy objętość sześcianu jeśli zmierzona z dokładnością do 1 cm długość jego krawędzi jest równa 1 m?

Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 4 (Rolle'a)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.*

Twierdzenie 5 (Lagrange'a)**.** *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teza twierdzenie Lagrange'a oznacza (przy spełnieniu jego założeń), że średnia prędkość wzrostu funkcji na przedziale $[a, b]$ musi być osiągana w pewnym jego punkcie.

Twierdzenie 6 (Reguła de L'Hospitala)**.** *Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$*, przy czym* $g(a) \neq 0$ *w sąsiedztwie* a*,*

2. *istnieje* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie jest również prawdziwe dla granic jednostronnych, granic w nieskończoności oraz przy pierwszym założeniu postaci:

1'. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Przykłady: 2. Wyznaczyć granice: (1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^x - 2}{\sqrt{x} - 1}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$; (3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg} x - \dfrac{1}{\cos x})$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.