**Def. 1.** *Funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej* nazywamy funkcję, której dziedzina i przeciwdziedzina są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

$$f : X \to Y$$

gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Jeśli funkcja jest określona jedynie wzorem, to za dziedzinę przyjmujemy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór ma sens. Tak określoną dziedzinę nazywamy *dziedziną naturalną*. *Zbiorem wartości* nazywamy zbiór wszystkich elementów $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$, taki że $f(x) = y$. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f$ oznaczamy odpowiednio $D_f$ i $W_f$.

*Przykład:* 1. Dla funkcji $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_f =[-1,1]$, $\qquad W_f =[0,1]$.

**Def. 2.** Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy:

1. różnowartościową gdy $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
2. *na* gdy $Y = W_f$,
3. *bijekcją* (*przekształceniem wzajemnie jednoznacznym*) gdy jest różnowartościowa i na,
4. *parzystą* gdy $f(-x) = f(x)$ dla $x \in D_f$ (wykres jest symetryczny względem $Oy$),
5. *nieparzystą* gdy $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in D_f$ (wykres jest symetryczny względem $O$),
6. *rosnącą* gdy $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, analogicznie określamy funkcje niemalejące, malejące i rosnące,
7. *okresową* gdy $f(x+T) = f(x)$ dla pewnego $T \in \mathbb{R}$ ($T$ nazywamy okresem),
8. *ograniczoną* gdy zbiór jej wartości jest ograniczony.

**Def. 3.** Jeśli $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, to *złożeniem* (*superpozycją*) funkcji $f, g$ nazywamy funkcję

$$g \circ f : X \to Z; \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

$f$ nazywamy funkcją *wewnętrzną*, a $g$ - *zewnętrzną* złożenia $g \circ f$.

*Przykład:* 2. Dla funkcji $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\;(g \circ f)(x) = |x|$, $f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$; $\;(f \circ g)(x) = x$.

**Def. 4.** Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to funkcją *odwrotną* do $f$ nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \to X$ określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Wykresy $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne względem prostej $y = x$.

**Logarytmy**

**Def. 5.** Dla dowolnej liczby $a > 0$, $a \neq 1$ i liczby $x > 0$ *logarytmem* z $x$ przy podstawie $a$ nazywamy taką liczbę $y = \log_a x$, że $a^y = x$. Piszemy $\log x$ dla $a = 10$ i $\ln x$ dla $a = e$. Są to odpowiednio *logarytm dziesiętny* i *logarytm naturalny*.

**Wn. 1.** *Funkcja $f(x) = \log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $g(x) = a^x$. Dla dowolnej podstawy $a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ dziedziną funkcji logarytmicznej $\log_a$ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, a zbiorem wartości zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.*

*Uwaga* 1. Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest rosnąca, a odwrotna do malejącej jest malejąca.

**Wn. 2.** *Jeśli $a \in [0, 1]$, to $\log_a$ jest funkcją malejącą, a jeśli $a > 1$, to $\log_a$ jest funkcją rosnącą. W szczególności* $\log$, *i* $\ln$ *rosną.*

**Własności logarytmów**

1. $\log_a a = 1$, w szczególności $\ln e = 1$,
2. $\log_a 1 = 0$ dla dowolnej podstawy $a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,
3. $a^{\log_a b} = b$, w szczególności dowolną liczbę dodatnią $a$ można zapisać $a = e^{\ln a}$,
4. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
5. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,
6. $\log_a x^r = r \log_a x$,
7. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$,
8. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$,
9. $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a} = \dfrac{\log b}{\log a}$.

**Funkcje elementarne**

1. Wielomiany $W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $D_W = \mathbb{R}$,
2. Funkcje wymierne $Q(x) = \frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie $W, V$ są wielomianami, $D_Q = \mathbb{R} \setminus \{x :\ V(x) = 0\}$,
3. Funkcja potęgowa $f(x) = x^r$, gdzie $r \in \mathbb{R}$, $D_f = (0, +\infty)$,

4. Funkcje trygonometryczne sin, cos, tg, ctg.
5. Funkcje cyklometryczne:

   arcsin (arkus sinus) to funkcja odwrotna do funkcji sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

   arccos - odwrotna do funkcji cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$,

   arctg - odwrotna do funkcji tg: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

   arcctg - odwrotna do funkcji ctg: $(0, \pi) \to \mathbb{R}$,
6. funkcje wykładnicza i logarytmiczna.
7. *Funkcjami elementarnymi* nazywamy wszystkie funkcje jakie można otrzymać z (1)...(6) za pomoc działań arytmetycznych i operacji składania.

**Granica właściwa**

**Def. 6.** Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$, (1) *sąsiedztwem*, (2) *lewym sąsiedztwem*, (3) *prawym sąsiedztwem* punktu $x_0$ o promieniu $\varepsilon$ nazywamy odpowiednio zbiory:

1. $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$,
2. $(x_0 - \varepsilon, x_0)$,
3. $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

**Def. 7** (Granica właściwa funkcji według Heinego)**.** Mówimy, że funkcja $f$ określona w sąsiedztwie punktu $x_0$ zbiega do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do $x_0$ ciągu $(x_n)$ punktów sąsiedztwa punktu $x_0$, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do $g$.

*Przykłady:* 1. 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & dla \quad x < 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ 1 & dla \quad x > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ nie istnieje.

**Def. 8.** Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę lewostronną $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do $x_0$ ciągu $(x_n)$ punktów lewego sąsiedztwa $x_0$, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do $g$. Analogicznie określamy granicę prawostronną, którą oznaczamy

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

**Twierdzenie 1.** $\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$

**Def. 9** (Granica właściwa funkcji przy $x \to +\infty$)**.** Mówimy, że funkcja $f$ zbiega w nieskończoności do granicy $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do $\infty$ ciągu $(x_n)$, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do $g$. Analogicznie określamy granicę przy $x \to -\infty$. Mówimy, że funkcja $f$ ma asymptotę poziomą $y = g$ w $\pm\infty$ gdy $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = g$.

**Def. 10** (Granice niewłaściwe przy $x \to x_0$)**.**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do $x_0$ ciągu $(x_n)$ punktów sąsiedztwa punktu $x_0$, ciąg wartości $(f(x_n))$ zbiega do $+\infty$ $(-\infty)$. Analogicznie, gdy ograniczymy się do punktów lewego lub prawego sąsiedztwa, definiujemy granice jednostronne

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\ (-\infty); \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty\ (-\infty)$$

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji $f$ gdy $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ lub $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$. Analogicznie określamy asymptotę pionową prawostronną. Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest asymptotą obustronną funkcji $f$ gdy jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną.

**Granice niewłaściwe w $+\infty$ i $-\infty$ i asymptoty ukośne**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

gdy dla dowolnego zbieżnego do $\infty$ ciągu $(x_n)$, ciąg wartości $(f(x_n))$ również zbiega do $\infty$. Analogicznie określamy granice $-\infty$ i granice przy $x \to -\infty$.

**Def. 11.** Mówimy, że prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną funkcji $f$ w $+\infty$ gdy

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Analogicznie określamy asymptotę ukośną w $-\infty$.

Ta sama funkcja może mieć różne asymptoty ukośne w $+\infty$ i $-\infty$. W celu wyznaczenia asymptoty ukośnej najpierw obliczamy $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ i jeśli ta granica istnieje (i jest właściwa), to $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.

**Arytmetyka granic**

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli funkcje $f, g$ mają w $x_0$ granice właściwe, to:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *gdzie* $c\in\mathbb{R}$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$,

*Uwaga* 2. Twierdzenie stosujemy również do $x_0 = \pm\infty$ oraz do granic jednostronnych.

Wyznaczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$.

*Przykład:* 3. Wyznaczyć asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

**Twierdzenie 3** (O trzech funkcjach)**.** *Jeżeli w sąsiedztwie punktu $x_0$ funkcje $f, g, h$ spełniają warunek $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = q$, to*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = q.$$

**Ważne granice wyrażeń nieoznaczonych**

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$,
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$,
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x} = r$ dla dowolnego $r\in\mathbb{R}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$,

**Ważna równość:** $a^x = e^{x\ln a}$.

**Def. 12.** Mówimy że funkcja $f$ określona w otoczeniu punktu $x_0$ jest *ciągła* w punkcie $x_0$, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(istnieje granica i jest równa wartości funkcji). Mówimy, że $f$ jest ciągła w zbiorze $X$, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

*Uwaga* 3. Wykres funkcji ciągłej na dowolnym przedziale można narysować bez odrywania ołówka od kartki. Nie jest w żadym miejscu rozerwany.

**Rodzaje nieciągłości:**

1. Mówimy, że $f$ ma w $x_0$ nieciągłość pierwszego rodzaju, gdy ma obie granice właściwe jednostronne w $x_0$ ale nie jest ciągła.

2. Funkcja $f$ ma w $x_0$ nieciągłość drugiego rodzaju gdy przynajmniej jedna granica jednostronna nie istnieje lub jest niewłaściwa.

**Twierdzenia o funkcjach ciągłych**

W szczególności dla nieciągłości pierwszego rozdzaju mówimy, że:

- $f$ ma nieciągłość typu *skok*, gdy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

- $f$ ma nieciągłość typu *luka*, gdy istnieje granica właściwa różna od wartości funkcji ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$).

**Twierdzenie 4.** *Funkcje elementarne są ciągłe we wszystkich punktach swoich dziedzin naturalnych.*

**Twierdzenie 5** (Weierstrassa)**.** *Funkcja ciągła na przedziale* $[a, b]$ *jest ograniczona i osiąga swoje kresy.*

**Twierdzenie 6** (Darboux)**.** *Funkcja ciągła na przedziale* $[a, b]$ *przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy* $f(a)$ *i* $f(b)$.