Zbiory ograniczone i kresy zbiorów

Def. 1. Liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym* a liczbę M *ograniczeniem górnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ gdy

$$(i) \quad \bigwedge_{x \in X} x \geq m; \qquad\qquad (ii) \quad \bigwedge_{x \in X} x \leq M.$$

Mówimy, że zbiór X jest *ograniczony z dołu* (odp. *z góry*) gdy ma ograniczenie dolne (odp. górne). Zbiór nazywamy *ograniczonym* gdy jest ograniczony z dołu i z góry, tzn.

$$\bigvee_{m,M \in \mathbb{R}} \ \bigwedge_{x \in X} m \leq x \leq M.$$

Def. 2. Liczbę a nazywamy *kresem dolnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ jeśli jest jego największym ograniczeniem dolnym, tzn.

$$\bigwedge_{x \in X} x \geq a \quad \text{i} \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \ \bigvee_{x_0 \in X} x_0 < a + \varepsilon.$$

Liczbę b nazywamy *kresem górnym* zbioru $X \subset \mathbb{R}$ jeśli jest jego najmniejszym ograniczeniem górnym, tzn.

$$\bigwedge_{x \in X} x \leq b \quad \text{i} \quad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \ \bigvee_{x_0 \in X} x_0 > b - \varepsilon.$$

Kres dolny zbioru X oznaczamy $\inf X$ a górny $\sup X$ piszemy również $\inf X = -\infty$ ($\sup X = \infty$), gdy X nie jest ograniczony z dołu (odp. z góry).

Twierdzenie 1 (Aksjomat ciągłości (zbioru liczb rzeczywistych))**.** *Każdy niepusty zbiór ograniczony z góry ma kres górny. (Każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.)*

Ciągi liczbowe

Def. 3. *Ciągiem* nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla danej liczby naturalnej n nazywamy n-tym *wyrazem* ciągu i oznaczamy a_n (b_n itp.). Ciąg oznaczamy (a_n) a zbiór jego wyrazów (czyli wartości funkcji) $\{a_n\}$.

Przykłady: 1. 1. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ to ciąg określony wzorem,

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \ldots$

2. $b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ to ciąg określony rekurencyjnie, jest to słynny *ciąg Fibbonaciego*,

   $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

3. (c_n) - ciąg kolejnych liczb pierwszych to ciąg określony opisowo,

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$.

- Mówimy, że ciąg (a_n) jest ograniczony (z góry) [z dołu] gdy zbiór $\{a_n\}$ jego wyrazów jest odpowiednio: ograniczony (z góry) [z dołu].
- Ciąg (a_n) nazywamy: (i) *rosnącym*, (ii) *niemalejącym* gdy odpowiednio:

  (i) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$; (ii) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq a_{n+1}$. Analogicznie określamy ciągi: *malejący* i *nierosnący*. Ciągi malejące i rosnące nazywamy *ściśle monotonicznymi* a nierosnące i niemalejące *monotonicznymi*. Mówimy też o ciągach monotonicznych od pewnego miejsca.
- Monotoniczność ciągu (a_n) określamy badając znak różnicy kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$. Jeśli ciąg (b_n) ma wyrazy dodatnie, to możemy też porównywać iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ z 1.
- Dla ciągów z poprzedniego przykładu zachodzi:

  a_n jest ograniczony i nie jest monotoniczny,

  ciąg Fibbonaciego b_n jest ograniczony z dołu, niemalejący i rosnący od drugiego miejsca,

  ciąg c_n jest ograniczony z dołu i rosnący.

Granica właściwa ciągu

Def. 4 (granica właściwa)**.** Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim a_n = a \qquad (\text{lub } \lim_{n \to \infty} a_n = a)$$

gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Przykłady: 2.

1. $\lim \dfrac{(-1)^n}{2n} = 0.$
2. Ciąg określony wzorem $d_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ nie jest zbieżny do żadnej granicy.

Granice niewłaściwe

Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do:

1. ∞, co zapisujemy $\lim a_n = \infty$ gdy

$$\bigwedge_{M > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} a_n > M$$

2. $-\infty$, co zapisujemy $\lim a_n = -\infty$ gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n < -M$$

Przykłady: 3. 1. Ciąg Fibbonaciego jest zbieżny do nieskończoności.

2. $\lim(n - n^2) = -\infty$.

3. Ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny do żadnej granicy.

Arytmetyka granic

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
2. $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$,
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *o ile* $\lim b_n \neq 0$,
5. $\lim(a_n)^k = (\lim a_n)^k$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}$,
6. $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$.

Wyznaczyć granice danych ciągów: $a_n = \dfrac{3n^3 - n^2}{n^3 + 5n^2 + n}$; $b_n = (\sqrt{n^2 + n} - n)$; $c_n = \sqrt{\dfrac{4^n + 2^n}{2^{2n} + 3^n}}$.

Twierdzenie 3. 1. *Jeśli* $lim a_n = \pm\infty$, *to* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ $\left(\frac{1}{\pm\infty} = 0\right)$.

2. *Jeżeli* $\lim a_n = 0$ *i* $a_n > 0$ $(a_n < 0)$, *to* $\lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$ $(-\infty)$ $\left(\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty\right)$.

Podobnie jako twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów czytamy skróty:

- $a + \infty = \infty$;
- $a \cdot \infty = \infty$ dla $a > 0$ ($a \cdot \infty = -\infty$ dla $a < 0$);
- $\infty^a = \infty$ dla $a > 0$;
- $\infty^a = 0$ dla $a < 0$;
- $a^\infty = \infty$ dla $a > 1$;
- $a^\infty = 0$ dla $a \in (-1, 1)$;

- $a^0 = 1$ dla $a > 0$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli ciąg jest rosnący i ograniczony z góry, to ma granicę właściwą.*

Def. 5. Liczbą Eulera e nazywamy granicę ciągu $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$$e := \lim(1 + \tfrac{1}{n})^n.$$

$e \approx 2,72 \approx 2,718281828459045...$ jest liczbą niewymierną.

Twierdzenie 5. *Jeżeli* $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = \pm\infty$, *to*

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \lim(1 + \frac{1}{b_n})^{b_n} = e.$$

Przykłady: 4. Obliczyć granice: $\lim(1 + \frac{1}{2n})^n$; $\quad \lim(1 - \frac{1}{n})^n$; $\quad \lim\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n$.

Def. 6. *Szeregiem* nazywamy wyrażenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...,$$

liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem szeregu, a sumę

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

n-tą sumą częściową. Mówimy, że szereg jest

- *zbieżny* gdy ciąg (S_n) jego sum częściowych jest zbieżny do granicy właściwej,
- *rozbieżny do* $\pm\infty$ gdy $\lim S_n = \pm\infty$,
- *rozbieżny* gdy (S_n) nie ma granicy (ani właściwej ani niewłaściwej).

Jeśli szereg jest zbieżny, to granicę ciągu sum częściowych nazywamy jego sumą i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (tak samo jak szereg!), czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

Twierdzenie 6 (O sumie szeregu geometrycznego)**.** *Jeżeli* $|q| < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$.

Przykład: 1. Wyznaczyć sumy danych szeregów: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)(n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{7^n}$.

Twierdzenie 7. *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, to*

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Uwaga 1. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim a_n = 0$.

Uwaga 2. Liczbę Eulera można też zdefiniować jako sumę szeregu: $e := \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ...$ $(0! := 1)$ Zbieżność tego szeregu do e jest znacznie szybsza niż zbieżność ciągu $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

n	a_n	S_n
1	2	2
2	2,25	2,5
3	2,37037	2,666666667
4	2,441406	2,708333333
5	2,48832	2,716666667
6	2,521626	2,718055556
7	2,5465	2,718253968
8	2,565785	2,71827877
9	2,581175	2,718281526
10	2,593742	2,718281801
11	2,604199	2,718281826
12	2,613035	2,718281828