Kwantyfikatory i ich negacje

Kwantyfikator ogólny. Zapis

$$\bigwedge_{x\in X} p(x)$$

czytamy: dla każdego $x \in X$ zachodzi $p(x)$. *Kwantyfikator szczegółowy.* Zapis

$$\bigvee_{x\in X} p(x)$$

czytamy: istnieje $x \in X$, dla którego zachodzi $p(x)$. Przy negacji kwantyfikator ogólny zamienia się w szczegółowy i odwrotnie:

$$\neg(\bigwedge_{x\in X} p(x)) \leftrightarrow \bigvee_{x\in X} \neg p(x); \qquad \neg(\bigvee_{x\in X} p(x)) \leftrightarrow \bigwedge_{x\in X} \neg p(x)$$

Ciało liczb zespolonych

Def. 1. Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych z następującymi działaniami dodawania i mnożenia:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Postać algebraiczna:

$$z = x + yi$$

x-część rzeczywista, y-część urojona. Liczby w postaci algebraicznej mnożymy jak wyrażenia algebraiczne uwzględniając równość:

$$i^2 = -1$$

Def. 2. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę zespoloną:

$$\overline{z} = x - yi.$$

Reguła dzielenia: Licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. **Własności sprzężenia**:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
4. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
5. $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba $\overline{z}$ również.*

Twierdzenie 2 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$.*

Wn. 1. *Każdy zespolony wielomian stopnia $n \geq 1$ rozkłada się na czynniki liniowe.*

Moduł i argument liczby zespolonej

Def. 3. Modułem liczby zespolonej $z = x + yi$ nazywamy liczbę rzeczywistą:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argumentem liczby z nazywamy dowolny kąt φ, taki że

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Piszemy $arg z$. Dokładnie jeden argument danej liczby jest zawarty w przedziale $[0, 2\pi)$. Nazywamy go argumentem głównym i oznaczamy $\mathrm{Arg} z$. **Interpretacja geometryczna:** Argument jest kątem pomiędzy dodatnią półosią rzeczywistą i promieniem wodzącym punktu reprezentującego daną liczbę, a moduł odległością tego punktu od początku układu współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

gdzie r jest modułem a φ argumentem liczby z.

Przykład: 1. 1. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb spełniających warunki

$$\begin{cases} |z| \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le Arg z \le \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

2. Równanie $|z - z_0| = r$ opisuje okrąg o środku z_0 i promieniu r.

Ważne wzory trygonometryczne:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Mnożenie liczb w postaci trygonometrycznej

$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
(Mnożąc liczby zespolone mnożymy ich moduły i dodajemy argumenty.)

Twierdzenie 3 (Wzory Moivre'a). *Dla dowolnej liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i liczby naturalnej n zachodzi:*

1. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$,

2. *istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $\sqrt[n]{z}$, które wyrażają się wzorem:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

dla $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Przykład: 2. Wielomian $W(x) = x^4 + 4$ rozłożyć na czynniki stopnia 2.