# Repetytorium matematyki elementarnej

semestr zimowy 2015

dr Damian Wiśniewski, KAiRR

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

-
-
-
-
-

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są dwie nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą trzeciej i kolejnych)
-
-
-
-

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są dwie nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą trzeciej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2), każde składające się z 5 zadań po 4 punkty; z każdego należy uzyskać co najmniej 50% punktów
-
-
-

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są dwie nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą trzeciej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2), każde składające się z 5 zadań po 4 punkty; z każdego należy uzyskać co najmniej 50% punktów
- Ocena końcowa z ćwiczeń a wynik procentowy:
  $[50\%, 60\%) = 3,0, \quad [60\%, 70\%) = 3,5,$
  $[70\%, 80\%) = 4,0, \quad [80\%, 90\%) = 4,5, \quad [90\%, 100\%] = 5,0$
-
-

## Moje dane


- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00


## Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są dwie nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą trzeciej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2), każde składające się z 5 zadań po 4 punkty; z każdego należy uzyskać co najmniej 50% punktów
- Ocena końcowa z ćwiczeń a wynik procentowy:
  $[50\%, 60\%) = 3,0, \quad [60\%, 70\%) = 3,5,$
  $[70\%, 80\%) = 4,0, \quad [80\%, 90\%) = 4,5, \quad [90\%, 100\%] = 5,0$
- między 9. a 15. tygodniem osoby, które jeszcze nie zaliczyły przedmiotu lub chcą uzyskać lepszą ocenę, będą miały możliwość poprawy K1, K2 lub pisania kolokwium semestralnego (KS); przeprowadzone zostaną dwa terminy poprawkowe
- 

## Moje dane

- e-mail : dawi@matman.uwm.edu.pl
- www: http://wmii.uwm.edu.pl/ $\sim$ kairr/dawi
- godziny konsultacji : poniedziałki 9:45 - 10:30, 12:45 - 14:00

## Warunki zaliczenia ćwiczeń

- dozwolone są dwie nieobecności (usprawiedliwienia dotyczą trzeciej i kolejnych)
- dwa kolokwia w semestrze (K1, K2), każde składające się z 5 zadań po 4 punkty; z każdego należy uzyskać co najmniej 50% punktów
- Ocena końcowa z ćwiczeń a wynik procentowy:
  $[50\%, 60\%) = 3,0, \quad [60\%, 70\%) = 3,5,$
  $[70\%, 80\%) = 4,0, \quad [80\%, 90\%) = 4,5, \quad [90\%, 100\%] = 5,0$
- między 9. a 15. tygodniem osoby, które jeszcze nie zaliczyły przedmiotu lub chcą uzyskać lepszą ocenę, będą miały możliwość poprawy K1, K2 lub pisania kolokwium semestralnego (KS); przeprowadzone zostaną dwa terminy poprawkowe
- aktywność - może zostać dodatkowo nagrodzona przy wystawianiu oceny końcowej

Niech będą dane niepuste zbiory $X$ i $Y$.

## Definicja

**Funkcją** *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru* $X$ *dokładnie jednego elementu ze zbioru* $Y$*:*

Niech będą dane niepuste zbiory $X$ i $Y$.

## Definicja

**Funkcją** *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru* $X$ *dokładnie jednego elementu ze zbioru* $Y$*:*

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \mid f(x) = y.$$

Niech będą dane niepuste zbiory $X$ i $Y$.

### Definicja

**Funkcją** *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru $X$ dokładnie jednego elementu ze zbioru $Y$:*

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \mid f(x) = y.$$

**Przykład funkcji.** $f(x) = \sqrt{x}$.

Niech będą dane niepuste zbiory $X$ i $Y$.

## Definicja

**Funkcją** *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru* $X$ *dokładnie jednego elementu ze zbioru* $Y$*:*

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \mid f(x) = y.$$

**Przykład funkcji.** $f(x) = \sqrt{x}$.
**Ćwiczenie.** Okręgiem o środu w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r$ nazywamy zbiór punktów spełniających warunek:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Czy to równanie jest funkcją?

Niech będą dane niepuste zbiory $X$ i $Y$.

## Definicja

**Funkcją** *nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru* $X$ *dokładnie jednego elementu ze zbioru* $Y$*:*

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Y \mid f(x) = y.$$

**Przykład funkcji.** $f(x) = \sqrt{x}$.
**Ćwiczenie.** Okręgiem o środu w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r$ nazywamy zbiór punktów spełniających warunek:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Czy to równanie jest funkcją?

1. Funkcja różnowartościowa (iniekcja, injekcja).

## Definicja

*Funkcję* $f(x)$ *nazywamy różnowartościową, jeśli dla dowolnych dwóch różnych argumentów przyjmuje różne wartości:*

$$\forall x_1, x_2 \in D \ (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

**Ćwiczenie** Korzystając z definicji, zbadać różnowartościowość funkcji na podanych przedziałach:

a) $a(x) = x^2 - 3x$, $\mathbb{R}$; b) $b(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty; 0)$; c) $c(x) = x^3 + 1$, $\mathbb{R}$.

**Ćwiczenie** Korzystając z definicji, zbadać różnowartościowość funkcji na podanych przedziałach:

a) $a(x) = x^2 - 3x$, $\mathbb{R}$; b) $b(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty; 0)$; c) $c(x) = x^3 + 1$, $\mathbb{R}$.

2. funkcja monotoniczna

## Definicja

*1. Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D$, jeżeli*

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)) \right].$$

*2. Funkcja f jest niemalejąca na zbiorze $A \subset D$, jeżeli*

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2)) \right].$$

*3. Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D$, jeżeli*

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)) \right].$$

*4. Funkcja f jest nierosnąca na zbiorze $A \subset D$, jeżeli*

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2)) \right].$$

**Ćwiczenie.** Korzystając z definicji, uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $a(x) = x^3$, $\mathbb{R}$;
b) $b(x) = \frac{1}{x}$, $(0; +\infty)$;
c) $c(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty; 0]$;
d) $d(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$;
e) $e(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty; 0)$;
f) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, $[1; +\infty)$.

# Ciągi liczbowe

Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych.

Ciąg (nieskończony) to funkcja odwzorowująca zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych, tzn. funkcja postaci $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wartości takiej funkcji dla kolejnych liczb naturalnych nazywa się wyrazami ciągu i oznacza $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$.

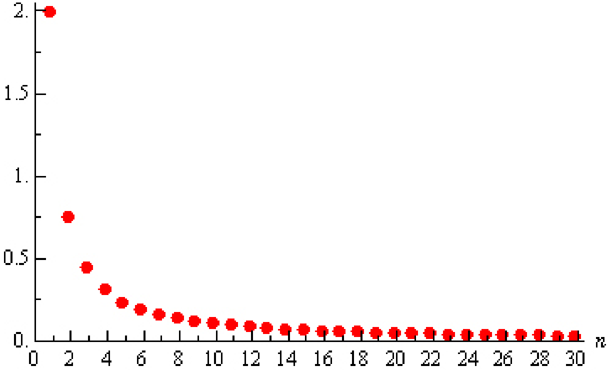
Ciągi możemy określać :

1. przy pomocy wzorów ogólnych, np. $a_n = \frac{3-n}{n^2},\ d_n = \sqrt{n+7}$
2. rekurencyjnie:
   - $a_n = \begin{cases} 1, & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2a_{n-1}^2 + 3, & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$
   - ciąg Fibbonaciego :

     $$1 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 8 \qquad 13 \qquad 21 \qquad \dots$$

     Jak go opisać rekurencyjnie?
3. opisowo: $(c_n)$ oznacza $n$-tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby$\sqrt{3}$.

## Przykład wykresu ciągu $a_n = \frac{n+1}{n^2}$



## Monotoniczność ciągu

### Definicja

*Ciąg* $(a_n)$ *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Ciągi nierosnące lub niemalejące nazywamy monotonicznymi.

## Monotoniczność ciągu

### Definicja

*Ciąg* $(a_n)$ *nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \geqslant a_{n+1}$

Ciągi nierosnące lub niemalejące nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu?

## Monotoniczność ciągu

### Definicja

*Ciąg* $(a_n)$ *nazywamy* :

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \geqslant a_{n+1}$

Ciągi nierosnące lub niemalejące nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu? $((b_n)$-ciąg o wyrazach dodatnich!)

| $a_{n+1} - a_n$ | $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ | **Ciąg** |
|---|---|---|
| $> 0$ | $> 1$ | rosnący |
| $< 0$ | $< 1$ | malejący |
| $\geqslant 0$ | $\geqslant 1$ | niemalejący |
| $\leqslant 0$ | $\leqslant 1$ | nierosnący |

## Monotoniczność ciągu

### Definicja

*Ciąg $(a_n)$ nazywamy :*

1. *rosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
2. *niemalejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leqslant a_{n+1}$
3. *malejącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
4. *nierosnącym, jeśli* $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geqslant a_{n+1}$

Ciągi nierosnące lub niemalejące nazywamy monotonicznymi.

Jak badać monotoniczność ciągu? $((b_n)$-ciąg o wyrazach dodatnich!)

| $a_{n+1} - a_n$ | $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ | **Ciąg** |
|---|---|---|
| $> 0$ | $> 1$ | rosnący |
| $< 0$ | $< 1$ | malejący |
| $\geqslant 0$ | $\geqslant 1$ | niemalejący |
| $\leqslant 0$ | $\leqslant 1$ | nierosnący |

Zadanie Zbadać monotoniczność poniższych ciągów :
a) $k_n = n^2 + 3n + 2$, b) $b_n = \frac{3n+5}{5n-4}$,
**c)** $a_n = \frac{n^2}{7n+4}$, **d)** $a_n = \frac{2^n}{n^2}$,
**e)** $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$, f) $b_n = \frac{7^n}{n!}$,
g) $b_n = 2 \cdot 3^n$

3. funkcja "na" (suriekcja, surjekcja)

O funkcji mówimy, że jest "na", jeśli osiąga wszystkie wartości ze swojej przeciwdziedziny.

3. funkcja "na" (suriekcja, surjekcja)

O funkcji mówimy, że jest "na", jeśli osiąga wszystkie wartości ze swojej przeciwdziedziny.

**Przykłady:**

- funkcja $f(x) = x^2$ jest funkcją działającą ze zbioru $R$ **"na"** zbiór $R_+ \cup \{0\}$ ($f : R \xrightarrow{\text{na}} R_+ \cup \{0\}$)
- dla kontrastu możemy powiedzieć, że $f(x) = x^2$ jest funkcją działającą ze zbioru $R$ **w** zbiór $R$ ($f : R \to R$)

3. funkcja "na" (suriekcja, surjekcja)

O funkcji mówimy, że jest "na", jeśli osiąga wszystkie wartości ze swojej przeciwdziedziny.

**Przykłady:**

- funkcja $f(x) = x^2$ jest funkcją działającą ze zbioru $R$ **"na"** zbiór $R_+ \cup \{0\}$ $(f : R \xrightarrow{\text{na}} R_+ \cup \{0\})$
- dla kontrastu możemy powiedzieć, że $f(x) = x^2$ jest funkcją działającą ze zbioru $R$ **w** zbiór $R$ $(f : R \to R)$

Zadanie Zbadać, czy podane funkcje $f : X \to Y$ są "na":

a) $f(x) = \sin x,\ X = [0, 2\pi),\ Y = [-1, 1];$
b) $f(x) = \sin x,\ X = (0, 2\pi),\ Y = [-1, 1];$
c) $f(x) = \sin x,\ X = [\pi, 2\pi),\ Y = [-1, 1];$
d) $f(x) = x^2,\ X = R,\ Y = (0, \infty);$
e) $f(x) = 2^x,\ X = R,\ Y = [0, \infty);$
f) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ X = (0, \infty),\ Y = [2, \infty)$

4. bijekcja

## Definicja

**Bijekcją** *(funkcją wzajemnie jednoznaczną) nazywamy funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" :*

*"injekcja + surjekcja = bijekcja".*

5. funkcja (nie)parzysta
   Funkcja $f$ jest parzysta, jeśli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$.
   Funkcja $f$ jest nieparzysta, jeśli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$.
   **To, że funkcja nie jest parzysta, nie oznacza, że jest nieparzysta!!!**
   **Ćwiczenie** Wskazać, które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste :

$$a(x) = x^4 - 3x^2 + 1,\ b(x) = \frac{2+x^2}{x^5},\ c(x) = x|x|,$$
$$d(x) = |\sin x|, e(x) = 2^x + 2^{-x}, f(x) = x^3 + x^2.$$

4. bijekcja

## Definicja

**Bijekcją** *(funkcją wzajemnie jednoznaczną) nazywamy funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" :*

$$\text{"}injekcja + surjekcja = bijekcja\text{"}.$$

5. funkcja (nie)parzysta
   Funkcja $f$ jest parzysta, jeśli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$.
   Funkcja $f$ jest nieparzysta, jeśli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$.
   **To, że funkcja nie jest parzysta, nie oznacza, że jest nieparzysta!!!**
   **Ćwiczenie** Wskazać, które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste :

$$a(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \;\; b(x) = \frac{2+x^2}{x^5}, \;\; c(x) = x|x|,$$
$$d(x) = |\sin x|, e(x) = 2^x + 2^{-x}, f(x) = x^3 + x^2.$$

4. bijekcja

## Definicja

**Bijekcją** *(funkcją wzajemnie jednoznaczną) nazywamy funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" :*

$$\text{"injekcja + surjekcja = bijekcja".}$$

5. funkcja (nie)parzysta
   Funkcja $f$ jest parzysta, jeśli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$.
   Funkcja $f$ jest nieparzysta, jeśli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$.
   **To, że funkcja nie jest parzysta, nie oznacza, że jest nieparzysta!!!**
   **Ćwiczenie** Wskazać, które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste :

$$a(x) = x^4 - 3x^2 + 1,\ b(x) = \frac{2 + x^2}{x^5},\ c(x) = x|x|,$$
$$d(x) = |\sin x|, e(x) = 2^x + 2^{-x}, f(x) = x^3 + x^2.$$

4. bijekcja

### Definicja

**Bijekcją** *(funkcją wzajemnie jednoznaczną) nazywamy funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i "na" :*

$$\text{"injekcja} + \text{surjekcja} = \text{bijekcja".}$$

5. funkcja (nie)parzysta
   Funkcja $f$ jest parzysta, jeśli spełnia równanie $f(x) = f(-x)$.
   Funkcja $f$ jest nieparzysta, jeśli spełnia równanie $f(-x) = -f(x)$.
   **To, że funkcja nie jest parzysta, nie oznacza, że jest nieparzysta!!!**
   **Ćwiczenie** Wskazać, które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste :

$$a(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \; b(x) = \frac{2 + x^2}{x^5}, \; c(x) = x|x|,$$
$$d(x) = |\sin x|, e(x) = 2^x + 2^{-x}, f(x) = x^3 + x^2.$$

6. funkcja okresowa

**Definicja**

*Funkcja $f : X \to R$ jest okresowa, jeśli*

$$\exists T > 0 \ \forall x \in X (x \pm T \in X \ \wedge \ f(x+T) = f(x)).$$

Liczbę $T$ nazywamy okresem funkcji.
**Przykłady** - wykresy funkcji trygonometrycznych.

7. dziedzina naturalna funkcji

**Definicja**

**Dziedziną naturalną** *funkcji $f$ nazywamy największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla którego ta funkcja ma sens.*

Jakie dziedziny naturalne mają poniższe funkcje?

$$g(x) = x^7 - 3x^2 + 1, \ h(x) = \sqrt[3]{x}, \ i(x) = \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}, \ m(x) = \sin\frac{1}{x}$$
$$k(x) = \sqrt{x^2+9}, \ l(x) = \sqrt[4]{-x^2+2x-8}, \ j(x) = \sqrt{x^2+5x-14}.$$

6. funkcja okresowa

**Definicja**

*Funkcja $f : X \to R$ jest okresowa, jeśli*

$$\exists T > 0 \ \forall x \in X (x \pm T \in X \ \wedge \ f(x+T) = f(x)).$$

Liczbę $T$ nazywamy okresem funkcji.
**Przykłady** - wykresy funkcji trygonometrycznych.

7. dziedzina naturalna funkcji

**Definicja**

**Dziedziną naturalną** *funkcji $f$ nazywamy największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla którego ta funkcja ma sens.*

Jakie dziedziny naturalne mają poniższe funkcje?

$$g(x) = x^7 - 3x^2 + 1, \ h(x) = \sqrt[3]{x}, \ i(x) = \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}, \ m(x) = \sin\frac{1}{x}$$

$$k(x) = \sqrt{x^2+9}, \ l(x) = \sqrt[4]{-x^2+2x-8}, \ j(x) = \sqrt{x^2+5x-14}.$$

6. funkcja okresowa

**Definicja**

*Funkcja $f : X \to R$ jest okresowa, jeśli*

$$\exists T > 0\ \forall x \in X (x \pm T \in X\ \wedge\ f(x+T) = f(x)).$$

Liczbę $T$ nazywamy okresem funkcji.
**Przykłady** - wykresy funkcji trygonometrycznych.

7. dziedzina naturalna funkcji

**Definicja**

**Dziedziną naturalną** *funkcji $f$ nazywamy największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla którego ta funkcja ma sens.*

Jakie dziedziny naturalne mają poniższe funkcje?

$$g(x) = x^7 - 3x^2 + 1,\ h(x) = \sqrt[3]{x},\ i(x) = \frac{x^3+1}{x^2+5x+6},\ m(x) = \sin\frac{1}{x}$$

$$k(x) = \sqrt{x^2+9},\ l(x) = \sqrt[4]{-x^2+2x-8},\ j(x) = \sqrt{x^2+5x-14}.$$

6. funkcja okresowa

**Definicja**

*Funkcja $f : X \to R$ jest okresowa, jeśli*

$$\exists T > 0 \ \forall x \in X (x \pm T \in X \ \wedge \ f(x+T) = f(x)).$$

Liczbę $T$ nazywamy okresem funkcji.
**Przykłady** - wykresy funkcji trygonometrycznych.

7. dziedzina naturalna funkcji

**Definicja**

**Dziedziną naturalną** *funkcji $f$ nazywamy największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla którego ta funkcja ma sens.*

Jakie dziedziny naturalne mają poniższe funkcje?

$$g(x) = x^7 - 3x^2 + 1, \ h(x) = \sqrt[3]{x}, \ i(x) = \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}, \ m(x) = \sin\frac{1}{x}$$
$$k(x) = \sqrt{x^2+9}, \ l(x) = \sqrt[4]{-x^2+2x-8}, \ j(x) = \sqrt{x^2+5x-14}.$$

# RÓWNANIA WIELOMIANOWE STOPNIA $n \geqslant 3$

## Definicja

*Wielomianem (funkcją wielomianową) zmiennej rzeczywistej $x$ nazywamy funkcję postaci*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*gdzie* $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \{0, 1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
*Stopień wielomianu, to najwyższa potęga, w której występuje zmienna w tym wielomianie, np. stopień wielomianu* $W(x) = ax^4 + 27x^2 - 12x$ *wynosi* 4, *jeśli współczynnik* $a \neq 0$ *albo* 2 *w przeciwnym przypadku.*

**Podstawowe sposoby rozwiązywania równań wielomianowych stopnia** $\geqslant 3$:

1. wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias
2. sprowadzenie do równania stopnia niższego
3. wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia
4. grupowanie parami (trójkami,...)
5. twierdzenie o pierwiastku całkowitym
6. twierdzenie o pierwiastku wymiernym
7. pomysły, sztuczki
8. metody przybliżone

# RÓWNANIA WIELOMIANOWE STOPNIA $n \geqslant 3$

## Definicja

*Wielomianem (funkcją wielomianową) zmiennej rzeczywistej $x$ nazywamy funkcję postaci*

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*gdzie* $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \{0, 1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
*Stopień wielomianu, to najwyższa potęga, w której występuje zmienna w tym wielomianie, np. stopień wielomianu* $W(x) = ax^4 + 27x^2 - 12x$ *wynosi* $4$, *jeśli współczynnik* $a \neq 0$ *albo* $2$ *w przeciwnym przypadku.*

**Podstawowe sposoby rozwiązywania równań wielomianowych stopnia** $\geqslant 3$:

1. wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias
2. sprowadzenie do równania stopnia niższego
3. wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia
4. grupowanie parami (trójkami,...)
5. twierdzenie o pierwiastku całkowitym
6. twierdzenie o pierwiastku wymiernym
7. pomysły, sztuczki
8. metody przybliżone

Zadanie 1. Rozwiązać poniższe równania wielomianowe opierając się na metodach 1-4 z poprzedniego slajdu:

1. $9x^3 - 3x^2 + 18x = 0$
2. $x^8 - 1 = 0$
3. $x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$
4. $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $7x^3 + 21x = 0$
6. $x^6 - 1 = 0$
7. $5x^3 + 10x^2 + 2x + 4 = 0$
8. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$
9. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 12x = 0$
10. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0$
11. $x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$
12. $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$
13. $x^{10} - x^6 = 0$
14. $x^8 - 2x^6 + x^4 = 0$

Jeśli metody 1-4 zawodzą, wtedy przechodzimy do metody nr 5, następnie (ewentualnie) nr 6. Aby z nich korzystać, oprócz samych twierdzeń (o pierwiastku całkowitym i wymiernym) należy umieć dzielić wielomiany (w zasadzie wielomian przez dwumian) i znać twierdzenie Bezouta.

## Dzielenie wielomianów

Ćwiczenie 1. Wykonać poniższe dzielenia $\frac{W(x)}{P(x)}$ oraz jako wniosek zapisać wielomianu $W(x)$ używając dwumianu $P(x)$:

1. $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,\ P(x) = x + 2$
2. $W(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5,\ P(x) = x - 1$
3. $W(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1,\ P(x) = x - 3$
4. $W(x) = 2x^5 - 3x^3 - x^2 - 80x - 156,\ P(x) = x - 3$
5. $W(x) = x^4 - 5x^3 + 3x + 1,\ P(x) = x - 1$
6. $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3,\ P(x) = x - 1$
7. $W(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 5x - 2,\ P(x) = x - 2$
8. $W(x) = x^5 + x + 2,\ P(x) = x + 1$
9. $W(x) = x^{10} - 4x^6 + 2x^2 + x + 3,\ P(x) = x + 1$
10. $W(x) = x^{12} - x^7 - x^5 + 1,\ P(x) = x - 1.$

Jeśli metody 1-4 zawodzą, wtedy przechodzimy do metody nr 5, następnie (ewentualnie) nr 6. Aby z nich korzystać, oprócz samych twierdzeń (o pierwiastku całkowitym i wymiernym) należy umieć dzielić wielomiany (w zasadzie wielomian przez dwumian) i znać twierdzenie Bezouta.

## Dzielenie wielomianów

Ćwiczenie 1. Wykonać poniższe dzielenia $\frac{W(x)}{P(x)}$ oraz jako wniosek zapisać wielomianu $W(x)$ używając dwumianu $P(x)$:

1. $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,\ P(x) = x + 2$
2. $W(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 5,\ P(x) = x - 1$
3. $W(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1,\ P(x) = x - 3$
4. $W(x) = 2x^5 - 3x^3 - x^2 - 80x - 156,\ P(x) = x - 3$
5. $W(x) = x^4 - 5x^3 + 3x + 1,\ P(x) = x - 1$
6. $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3,\ P(x) = x - 1$
7. $W(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 5x - 2,\ P(x) = x - 2$
8. $W(x) = x^5 + x + 2,\ P(x) = x + 1$
9. $W(x) = x^{10} - 4x^6 + 2x^2 + x + 3,\ P(x) = x + 1$
10. $W(x) = x^{12} - x^7 - x^5 + 1,\ P(x) = x - 1.$

## Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

### Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

## Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Widzimy, że twierdzenie Bezouta jest równoważnością : $p \Leftrightarrow q$, zatem zachodzą jednocześnie twierdzenia $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$. W praktyce będziemy wykorzystywać pierwsze z nich, tzn. Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - a$. Jeśli nie umiemy poradzić sobie z równaniem wielomianowym $W(x) = 0$ metodami 1-4, to schemat korzystania z tw. Bezouta wydaje się być następujący:

## Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Widzimy, że twierdzenie Bezouta jest równoważnością : $p \Leftrightarrow q$, zatem zachodzą jednocześnie twierdzenia $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$. W praktyce będziemy wykorzystywać pierwsze z nich, tzn. Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - a$. Jeśli nie umiemy poradzić sobie z równaniem wielomianowym $W(x) = 0$ metodami 1-4, to schemat korzystania z tw. Bezouta wydaje się być następujący:

1. Zgadujemy jakie może być rozwiązanie tego równania, powiedzmy, że jest to liczba $a$.
2. 
3. 

## Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Widzimy, że twierdzenie Bezouta jest równoważnością : $p \Leftrightarrow q$, zatem zachodzą jednocześnie twierdzenia $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$. W praktyce będziemy wykorzystywać pierwsze z nich, tzn. Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - a$. Jeśli nie umiemy poradzić sobie z równaniem wielomianowym $W(x) = 0$ metodami 1-4, to schemat korzystania z tw. Bezouta wydaje się być następujący:

1. Zgadujemy jakie może być rozwiązanie tego równania, powiedzmy, że jest to liczba $a$.
2. Dzielimy wielomian $W(x)$ przez $(x - a)$ (bo wiemy z tw. Bezouta, że można to zrobić). W wyniku dostajemy wielomian $P(x)$, którego stopień jest o 1 niższy niż stopień wielomianu $W(x)$. Mamy zatem $W(x) = (x - a)P(x) = 0$.
3. 

## Twierdzenie Bezouta

Liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ (tzn. $W(a) = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Widzimy, że twierdzenie Bezouta jest równoważnością : $p \Leftrightarrow q$, zatem zachodzą jednocześnie twierdzenia $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$. W praktyce będziemy wykorzystywać pierwsze z nich, tzn. Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to ten wielomian jest podzielny przez dwumian $x - a$. Jeśli nie umiemy poradzić sobie z równaniem wielomianowym $W(x) = 0$ metodami 1-4, to schemat korzystania z tw. Bezouta wydaje się być następujący:

1. Zgadujemy jakie może być rozwiązanie tego równania, powiedzmy, że jest to liczba $a$.
2. Dzielimy wielomian $W(x)$ przez $(x - a)$ (bo wiemy z tw. Bezouta, że można to zrobić). W wyniku dostajemy wielomian $P(x)$, którego stopień jest o 1 niższy niż stopień wielomianu $W(x)$. Mamy zatem $W(x) = (x - a)P(x) = 0$.
3. Szukamy rozwiązań równania $P(x) = 0$. Tu mogą już zadziałać metody wcześniejsze metody; jeśli nie, to znowu zgadujemy rozwiązanie i korzystamy z tw. Bezouta.

Największym problemem schematu z poprzedniego slajdu jest fakt zgadywania rozwiązań równania, ponieważ:

1. jest nieskończenie wiele możliwości!; równanie może mieć trudne do zgadnięcia rozwiązania, np. ułamki, "duże" liczby naturalne, liczby niewymierne
2. równanie może nie mieć rozwiązań (ale to da się czasami zauważyć).

Największym problemem schematu z poprzedniego slajdu jest fakt zgadywania rozwiązań równania, ponieważ:

1. jest nieskończenie wiele możliwości!; równanie może mieć trudne do zgadnięcia rozwiązania, np. ułamki, "duże" liczby naturalne, liczby niewymierne
2. równanie może nie mieć rozwiązań (ale to da się czasami zauważyć).

Ćwiczenie 2. Znaleźć rozwiązania poniższych równań:

- $x^3 - 7x + 6 = 0$
- $8x^3 + x^2 - 23x + 14 = 0$
- $x^3 + (\sqrt{11} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2})x^2 + (15\sqrt{6} - 3\sqrt{22} - 5\sqrt{33})x + 15\sqrt{66} = 0$
- $x^6 + (3\sqrt{66} - 12\sqrt{2})x^4 + 5\sqrt{3} - \sqrt{5} - 3\sqrt{2} = 0$

## Wielomiany o współczynnikach całkowitych - twierdzenia

## Wielomiany o współczynnikach całkowitych - twierdzenia

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \ b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

### Twierdzenie o pierwiastku całkowitym

Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$.

## Wielomiany o współczynnikach całkowitych - twierdzenia

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \ b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

### Twierdzenie o pierwiastku całkowitym

Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$.

Pamiętamy : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$?

## Wielomiany o współczynnikach całkowitych - twierdzenia

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \ b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

**Twierdzenie o pierwiastku całkowitym**

Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$.

Pamiętamy : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$?

Ćwiczenie 3. Czy liczba 3 może być rozwiązaniem poniższych równań?

1. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$
2. $3x^4 - 6x^3 + 2x + 8 = 0$
3. $\sqrt{2}x^3 - x^2 + 6 = 0$
4. $x^3 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{8} = 0$

## Wielomiany o współczynnikach całkowitych - twierdzenia

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

**Twierdzenie o pierwiastku całkowitym**

Jeśli liczba $a$ jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$.

Pamiętamy : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$?

Ćwiczenie 3. Czy liczba 3 może być rozwiązaniem poniższych równań?

1. $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 = 0$
2. $3x^4 - 6x^3 + 2x + 8 = 0$
3. $\sqrt{2}x^3 - x^2 + 6 = 0$
4. $x^3 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{8} = 0$

Ćwiczenie 4. Podaj liczby całkowite, które mogą być rozwiązaniami poniższych równań:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^6 + 2x^4 - 31x^2 + 28 = 0$
3. $8x^3 + x^2 - 23x + 14 = 0$

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \ b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

### Twierdzenie o pierwiastku wymiernym

Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $p$ jest dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$, zaś $q$ jest dzielnikiem współczynnika $b_n$.

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \; b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

## Twierdzenie o pierwiastku wymiernym

Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $p$ jest dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$, zaś $q$ jest dzielnikiem współczynnika $b_n$.

Niech $W(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,\ \ b_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wówczas:

**Twierdzenie o pierwiastku wymiernym**

Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym, jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $p$ jest dzielnikiem wyrazu wolnego $b_0$, zaś $q$ jest dzielnikiem współczynnika $b_n$.

Ćwiczenie 5. Podać liczby wymierne, które mogą być pierwiastkami wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, gdy

1. $W(x) = x^6 + \cdots + 3$
2. $W(x) = 4x^{21} + \cdots + 1$
3. $W(x) = 12x^{1993} + \cdots + 5$
4. $W(x) = 10x^7 + \cdots + 15$

Zadanie 2. Znaleźć rozwiązania poniższych równań:

1. $x^3 - 5x + 2 = 0$
2. $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
3. $x^3 - 4x^2 + 9 = 0$
4. $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$
5. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
6. $3x^3 + 8x^2 + 3x = 2$
7. $2x^7 - x^4 - x = 0$
8. $6x^4 + x^3 - 20x^2 - 3x + 6 = 0$
9. $x^4 - x^3 - 13x^2 + 32x - 20 = 0$
10. $36x^4 - 108x^3 + 107x^2 - 43x + 6 = 0$
11. $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0$
12. $8x^4 + 14x^3 - 69x^2 + 14x + 8 = 0$
13. $(*) \quad x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
14. $(*) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0$
15. $(*) \quad (x-3)x(x+1)(x+4) = -36$ - spróbować rozwiązać sprytnie.

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązania poniższych nierówności:

1. $(x-3)(x+7)^2(2x-13)^7 \leqslant 0$
2. $x(3x+2)(x-1)^{22}(x^2-6x+15) > 0$
3. $x^{13}(8-x)^3(x+2)^6(x-15) > 0$
4. $(x^2-7x+6)(x^2-3x+2) < 0$
5. $(x^2-16)(x^2-5x+4)(x^3-1) \geqslant 0$
6. $(x^2+4)(x^2-6x+5)(x^2+6x+5) < 0$
7. $x^4(x^4-10x^2+9)(x^4-1)(81-x^4)(1-x^3) > 0$
8. $x^5(x^4-8x^2-9)(4-x^2) \leqslant 0$
9. $x^3-21x-10 < 0$
10. $x^3-x^2-37x-35 > 0$
11. $x^4+2x^3-x-2 < 0$
12. $x^{10}-x^8-8x^7+8x^5 > 0$
13. $x^4-5x^3+7x^2+20x-44 < 0.$

## Wielomiany - zadania z parametrem (dla chętnych)

1. Dla jakich wartości parametru $k$ wielomian $W(x) = x^3 + k^2x^2 - 4kx - 5$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$?
2. Uzasadnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych $a, b$ dwumian $x + (a + b)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x) = x^3 + a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
3. Pierwiastkami równania

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$$

   są liczby 2 i 3. Obliczyć $m$ i $n$ oraz trzeci pierwiastek równania.
4. Dla jakich wartości $a, b$ liczba 2 jest dwukrotnym miejscem zerowym wielomianu $W(x) = x^4 + (a - 2)x^3 + bx^2 + (a + b)x + 4$?
5. Liczba 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 18$. Znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
6. Dla jakich wartości $a, b, c$ liczba 1 jest trzykrotnym rozwiązaniem równania $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$?

# Funkcja wymierna

1) Określić dziedzinę i sprowadzić do najprostszej postaci poniższe wyrażenia:

a) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$

b) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$

c) $\frac{(x^3+8)(x+1)}{x^2+3x+2}$.

# Funkcja wymierna

1) Określić dziedzinę i sprowadzić do najprostszej postaci poniższe wyrażenia:
   a) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$
   b) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$
   c) $\frac{(x^3+8)(x+1)}{x^2+3x+2}$.
2) Wyznaczyć dziedzinę poniższych funkcji:
   a) $f(x) = \frac{x-2}{x^3-7x-6}$
   b) $f(x) = \frac{x}{2x^3+x^2+x-1}$
   c) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-16}$.

# Funkcja wymierna

1) Określić dziedzinę i sprowadzić do najprostszej postaci poniższe wyrażenia:
   a) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$
   b) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$
   c) $\frac{(x^3+8)(x+1)}{x^2+3x+2}$.
2) Wyznaczyć dziedzinę poniższych funkcji:
   a) $f(x) = \frac{x-2}{x^3-7x-6}$
   b) $f(x) = \frac{x}{2x^3+x^2+x-1}$
   c) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-16}$.
3) Wyznaczyć te wartości parametru $k$, dla których dziedziną funkcji $f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych:
   a) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+k}$
   b) $f(x) = \frac{x^2-4}{kx^2+kx+1}$.

# Funkcja wymierna

1) Określić dziedzinę i sprowadzić do najprostszej postaci poniższe wyrażenia:
   a) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$
   b) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$
   c) $\frac{(x^3+8)(x+1)}{x^2+3x+2}$.
2) Wyznaczyć dziedzinę poniższych funkcji:
   a) $f(x) = \frac{x-2}{x^3-7x-6}$
   b) $f(x) = \frac{x}{2x^3+x^2+x-1}$
   c) $f(x) = \frac{x^4+2}{x^4-16}$.
3) Wyznaczyć te wartości parametru $k$, dla których dziedziną funkcji $f(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych:
   a) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+k}$
   b) $f(x) = \frac{x^2-4}{kx^2+kx+1}$.
4) Rozwiązać poniższe równania:
   a) $\frac{x^3-x^2-3x-9}{x^3-2x^2-3x} = 0$
   b) $\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$
   c) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$
   d) $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1$
   e) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} - \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$.

5) Wyznaczyć te wartości parametru $m$, dla których równanie

a) $\frac{x^2+mx+4}{x^{-}4x+5} = 0$

b) $\frac{mx^2+6x+3}{x^2-4x+5} = 0$

c) $\frac{x^2+8x+m}{x+3} = 0.$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

6) Rozwiązać poniższe nierówności:

a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0$

b) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0$

c) $\frac{1+x^3}{x^2-4} < 0$

d) $\frac{x^2+2}{x+1} < 2$

e) $\frac{x-1}{x+1} < x$

f) $\frac{13}{x-3} - \frac{3}{x+1} < -4$

g) $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$

h) $\frac{x}{x^2-5x+6} < \frac{1}{x-2}$

i) $\frac{x^2+x-4}{2x-5} < 1.$

7) Znaleźć takie wartości parametru $m$, aby zbiorem rozwiązań nierówności

a) $\frac{x^2+2x+m}{x^2+3x+5} > 0$

b) $\frac{x^2+3x+5}{px^2+2x+p} < 0.$

był zbiór liczb rzeczywistych.

# Rozkład funkcji wymiernych za pomocą ułamków prostych

**Co nazywamy ułamkami prostymi?**

Wyróżniamy dwa typy ułamków prostych:

1. *Ułamki proste pierwszego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \quad \text{gdzie } k \neq 0,\ l, m \in R,\ n \in N$$
2. *Ułamki proste drugiego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \text{gdzie } a \neq 0,\ b, c, r, s \in R,\ n \in N, \text{ oraz } b^2-4ac<0.$$

**Własność**

Każda funkcja wymierna daje się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych.

**Co nazywamy ułamkami prostymi?**

Wyróżniamy dwa typy ułamków prostych:

1. *Ułamki proste pierwszego rodzaju* to wyrażenia postaci

$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \quad \text{gdzie } k \neq 0,\ l, m \in R,\ n \in N$$

2. *Ułamki proste drugiego rodzaju* to wyrażenia postaci

$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \text{gdzie } a \neq 0,\ b, c, r, s \in R,\ n \in N,\ \text{oraz } b^2-4ac<0.$$

**Własność**

Każda funkcja wymierna daje się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych.

# Rozkład funkcji wymiernych za pomocą ułamków prostych

**Co nazywamy ułamkami prostymi?**

Wyróżniamy dwa typy ułamków prostych:

1. *Ułamki proste pierwszego rodzaju* to wyrażenia postaci

$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \quad \text{gdzie } k \neq 0,\ l, m \in R,\ n \in N$$

2. *Ułamki proste drugiego rodzaju* to wyrażenia postaci

$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \text{gdzie } a \neq 0,\ b, c, r, s \in R,\ n \in N, \text{ oraz } b^2-4ac<0.$$

**Własność**

Każda funkcja wymierna daje się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych.

# Rozkład funkcji wymiernych za pomocą ułamków prostych

**Co nazywamy ułamkami prostymi?**

Wyróżniamy dwa typy ułamków prostych:

1. *Ułamki proste pierwszego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \quad \text{gdzie } k \neq 0,\ l, m \in R,\ n \in N$$

2. *Ułamki proste drugiego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \text{gdzie } a \neq 0,\ b, c, r, s \in R,\ n \in N, \text{ oraz } b^2 - 4ac < 0.$$

**Własność**

Każda funkcja wymierna daje się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych.

# Rozkład funkcji wymiernych za pomocą ułamków prostych

**Co nazywamy ułamkami prostymi?**

Wyróżniamy dwa typy ułamków prostych:

1. *Ułamki proste pierwszego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{m}{(kx+l)^n}, \quad \text{gdzie } k \neq 0,\ l, m \in R,\ n \in N$$

2. *Ułamki proste drugiego rodzaju* to wyrażenia postaci
$$\frac{rx+s}{(ax^2+bx+c)^n}, \quad \text{gdzie } a \neq 0,\ b, c, r, s \in R,\ n \in N,\ \text{oraz } b^2 - 4ac < 0.$$

**Własność**

Każda funkcja wymierna daje się przedstawić jako suma wielomianu i ułamków prostych.

## Algorytm rozkładu funkcji wymiernej za pomocą ułamków prostych

Niech dana będzie funkcja wymierna postaci $\frac{W(x)}{Z(x)}$. Wtedy:

1. Jeśli $\deg W(x) \geqslant \deg Z(x)$, to dzielimy $W(x)$ przez $Z(x)$. Dzięki temu możemy przedstawić wielomian $W(x)$ jako sumę pewnego wielomianu oraz funkcji wymiernej $\frac{Y(x)}{Z(x)}$, gdzie $\deg Y(x) < \deg Z(x)$. Funkcję wymierną $\frac{Y(x)}{Z(x)}$ rozkładamy zgodnie z podpunktem drugim.
2. Jeżeli $\deg W(x) < \deg Z(x)$, to:
   - Przedstawiamy $Z(x)$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych (czynniki liniowe lub drugiego stopnia z $\Delta < 0$).
   - Przewidujemy postać rozkładu $\frac{W(x)}{Z(x)}$ na ułamki proste, których kształt zależy od czynników w mianowniku. Dla każdego czynnika postaci $(kx + l)^n$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{M_1}{(kx+l)^1}, \ldots, \frac{M_n}{(kx+l)^n}$, gdzie $M_i$ to pewne, szukane, stałe. Dla czynników postaci $(ax^2 + bx + xc)^n$, $\Delta < 0$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{R_1 x+S_1}{(ax^2+bx+c)^1}, \ldots, \frac{R_n x+S_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdzie $R_i, S_i$ to pewne, szukane, stałe.
3. Znajdujemy wszystkie nieznane stałe przez rozwiązanie stosownych układów równań.

## Algorytm rozkładu funkcji wymiernej za pomocą ułamków prostych

Niech dana będzie funkcja wymierna postaci $\frac{W(x)}{Z(x)}$. Wtedy:

1. Jeśli $\deg W(x) \geqslant \deg Z(x)$, to dzielimy $W(x)$ przez $Z(x)$. Dzięki temu możemy przedstawić wielomian $W(x)$ jako sumę pewnego wielomianu oraz funkcji wymiernej $\frac{Y(x)}{Z(x)}$, gdzie $\deg Y(x) < \deg Z(x)$. Funkcję wymierną $\frac{Y(x)}{Z(x)}$ rozkładamy zgodnie z podpunktem drugim.
2. Jeżeli $\deg W(x) < \deg Z(x)$, to:
   - Przedstawiamy $Z(x)$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych (czynniki liniowe lub drugiego stopnia z $\Delta < 0$).
   - Przewidujemy postać rozkładu $\frac{W(x)}{Z(x)}$ na ułamki proste, których kształt zależy od czynników w mianowniku. Dla każdego czynnika postaci $(kx+l)^n$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{M_1}{(kx+l)^1}, \ldots, \frac{M_n}{(kx+l)^n}$, gdzie $M_i$ to pewne, szukane, stałe. Dla czynników postaci $(ax^2+bx+xc)^n$, $\Delta < 0$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{R_1x+S_1}{(ax^2+bx+c)^1}, \ldots, \frac{R_nx+S_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdzie $R_i, S_i$ to pewne, szukane, stałe.
3. Znajdujemy wszystkie nieznane stałe przez rozwiązanie stosownych układów równań.

## Algorytm rozkładu funkcji wymiernej za pomocą ułamków prostych

Niech dana będzie funkcja wymierna postaci $\frac{W(x)}{Z(x)}$. Wtedy:

1. Jeśli $\deg W(x) \geqslant \deg Z(x)$, to dzielimy $W(x)$ przez $Z(x)$. Dzięki temu możemy przedstawić wielomian $W(x)$ jako sumę pewnego wielomianu oraz funkcji wymiernej $\frac{Y(x)}{Z(x)}$, gdzie $\deg Y(x) < \deg Z(x)$. Funkcję wymierną $\frac{Y(x)}{Z(x)}$ rozkładamy zgodnie z podpunktem drugim.
2. Jeżeli $\deg W(x) < \deg Z(x)$, to:
   - Przedstawiamy $Z(x)$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych (czynniki liniowe lub drugiego stopnia z $\Delta < 0$).
   - Przewidujemy postać rozkładu $\frac{W(x)}{Z(x)}$ na ułamki proste, których kształt zależy od czynników w mianowniku. Dla każdego czynnika postaci $(kx+l)^n$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{M_1}{(kx+l)^1}, \ldots, \frac{M_n}{(kx+l)^n}$, gdzie $M_i$ to pewne, szukane, stałe. Dla czynników postaci $(ax^2+bx+xc)^n$, $\Delta < 0$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{R_1x+S_1}{(ax^2+bx+c)^1}, \ldots, \frac{R_nx+S_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdzie $R_i, S_i$ to pewne, szukane, stałe.
3. Znajdujemy wszystkie nieznane stałe przez rozwiązanie stosownych układów równań.

## Algorytm rozkładu funkcji wymiernej za pomocą ułamków prostych

Niech dana będzie funkcja wymierna postaci $\frac{W(x)}{Z(x)}$. Wtedy:

1. Jeśli $\deg W(x) \geqslant \deg Z(x)$, to dzielimy $W(x)$ przez $Z(x)$. Dzięki temu możemy przedstawić wielomian $W(x)$ jako sumę pewnego wielomianu oraz funkcji wymiernej $\frac{Y(x)}{Z(x)}$, gdzie $\deg Y(x) < \deg Z(x)$. Funkcję wymierną $\frac{Y(x)}{Z(x)}$ rozkładamy zgodnie z podpunktem drugim.
2. Jeżeli $\deg W(x) < \deg Z(x)$, to:
    - Przedstawiamy $Z(x)$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych (czynniki liniowe lub drugiego stopnia z $\Delta < 0$).
    - Przewidujemy postać rozkładu $\frac{W(x)}{Z(x)}$ na ułamki proste, których kształt zależy od czynników w mianowniku. Dla każdego czynnika postaci $(kx+l)^n$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{M_1}{(kx+l)^1}, \ldots, \frac{M_n}{(kx+l)^n}$, gdzie $M_i$ to pewne, szukane, stałe. Dla czynników postaci $(ax^2+bx+xc)^n$, $\Delta < 0$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{R_1x+S_1}{(ax^2+bx+c)^1}, \ldots, \frac{R_nx+S_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdzie $R_i, S_i$ to pewne, szukane, stałe.
3. Znajdujemy wszystkie nieznane stałe przez rozwiązanie stosownych układów równań.

## Algorytm rozkładu funkcji wymiernej za pomocą ułamków prostych

Niech dana będzie funkcja wymierna postaci $\frac{W(x)}{Z(x)}$. Wtedy:

1. Jeśli $\deg W(x) \geqslant \deg Z(x)$, to dzielimy $W(x)$ przez $Z(x)$. Dzięki temu możemy przedstawić wielomian $W(x)$ jako sumę pewnego wielomianu oraz funkcji wymiernej $\frac{Y(x)}{Z(x)}$, gdzie $\deg Y(x) < \deg Z(x)$. Funkcję wymierną $\frac{Y(x)}{Z(x)}$ rozkładamy zgodnie z podpunktem drugim.
2. Jeżeli $\deg W(x) < \deg Z(x)$, to:
   - Przedstawiamy $Z(x)$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych (czynniki liniowe lub drugiego stopnia z $\Delta < 0$).
   - Przewidujemy postać rozkładu $\frac{W(x)}{Z(x)}$ na ułamki proste, których kształt zależy od czynników w mianowniku. Dla każdego czynnika postaci $(kx + l)^n$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{M_1}{(kx+l)^1}, \ldots, \frac{M_n}{(kx+l)^n}$, gdzie $M_i$ to pewne, szukane, stałe. Dla czynników postaci $(ax^2 + bx + xc)^n$, $\Delta < 0$ przewidujemy ułamki proste postaci $\frac{R_1 x+S_1}{(ax^2+bx+c)^1}, \ldots, \frac{R_n x+S_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdzie $R_i, S_i$ to pewne, szukane, stałe.
3. Znajdujemy wszystkie nieznane stałe przez rozwiązanie stosownych układów równań.

Zadanie. Rozłożyć poniższe funkcje wymierne na ułamki proste:

1. $f(x) = \frac{5}{x^2-x-2}$
2. $f(x) = \frac{6x^2-x+1}{x^3-x}$
3. $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)^3}$
4. $f(x) = \frac{3x}{x^4-5x^2-36}$
5. $f(x) = \frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}$
6. $f(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}$
7. $f(x) = \frac{2x-5}{x^3+3x^2-10x-24}$
8. $f(x) = \frac{x^5+1}{x^5-2x^4-16x+32}$
9. $f(x) = \frac{x^5+1}{x^5+x^4-x-1}$
10. $f(x) = \frac{x^6+2x-3}{x^5+2x^3+x}$

# PRZYKŁADOWE KOLOKWIUM NR 1

1. Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n!}{12^n}$.
2. Znaleźć rozwiązania równania
$$x^3 - 168x - 13 = 0.$$
3. Rozwiązać poniższe nierówności:
$$x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 4x + 8 \leqslant 0,$$
$$\frac{3}{x+1} \leqslant \frac{6}{x^2-1}.$$
4. Funkcję wymierną
$$f(x) = \frac{4x^5 + x^3 - x^2}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$$
rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych. Nie liczyć współczynników.

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \; m \in R$.

Działania na potęgach

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$,

$(a^x)^y = a^{xy}$,

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$

$a^0 = 1, \;$ dla $a \neq 0$,

$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$.

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}$.

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \; m \in R.$

Działania na potęgach

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad a^x : b^x = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1, \; \text{dla } a \neq 0,$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}.$

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \; m \in R$.

Działania na potęgach

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$,

$(a^x)^y = a^{xy}$,

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$

$a^0 = 1, \; \text{dla } a \neq 0$,

$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$.

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}$.

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \; m \in R$.

Działania na potęgach

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad a^x : b^x = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1, \; \text{dla } a \neq 0,$$
$$a^{-n} = \tfrac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}$.

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \ m \in R.$

Działania na potęgach

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad a^x : b^x = (\tfrac{a}{b})^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1, \ \text{dla } a \neq 0,$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}.$

# Funkcja potęgowa

## Definicja

*Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci* $f(x) = x^m, \; m \in R$.

Działania na potęgach

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad a^x : b^x = \left(\tfrac{a}{b}\right)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1, \; \text{dla } a \neq 0,$$
$$a^{-n} = \tfrac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}.$$

Często przy działaniach na potęgach (pierwiastkach) korzystamy z następujących przekształceń:

- zamiana podstawy na niższą : $9^7 = (3^2)^7 = 3^{14}$
- zamiana podstawy na wyższą : $2^{12} = (2^3)^4 = 8^4$
- zamiana kolejności potęgowania i pierwiastkowania : $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$
- wyłączanie przed nawias : $3 \cdot 4^{20} - 2 \cdot 4^{19} = 4^{19} \cdot (3 \cdot 4 - 2) = 10 \cdot 4^{19}$.

# Zadania

1. Obliczyć:
   - $3^4 \cdot 9^8$
   - $\frac{(4^2)^8}{8^{10}}$
   - $\frac{(3^{15}+3^{13})\cdot 2^9}{(3^{14}+3^{12})\cdot 1024}$
   - $\frac{1^{-1}+2^{-2}}{(\frac{2}{3})^{-2}+(-4)^{-1}\cdot 5+(0{,}5)^2}$
   - $64^{\frac{1}{3}},\ 27^{-\frac{5}{3}},\ 9^{-1{,}5}$
   - $(\frac{25}{49})^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{7})^{-1}$
   - $(9^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} - (25^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{10}} + [(\frac{3}{4})^{-1} \cdot (\frac{2}{9})^{\frac{6}{7}}]^0 : 36^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$
   - $[9^{-\frac{1}{4}} + (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}] \cdot [9^{-\frac{1}{4}} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}]$
   - $[(4+7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (4-7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^2$
   - $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}},\ 12^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
2. Wykonać poniższe działania:
   - $\frac{(x^3)^2\cdot(x^5)^3}{(x^2)^4}$
   - $(\frac{5x^3}{6y^2})^3,\ \frac{27a^5}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^4}$
   - $(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4})^{-2} \cdot (\frac{a^4b^{-2}}{c^{-2}d^{-3}})^{-3}$
   - $(x^2-y^2)(x^{-2}+y^{-2}),\ (x^{-2}+y^{-3})(x^{-2}-y^{-3})$
   - $(\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{8}y^{\frac{1}{2}})^2.$

# Zadania

1. Obliczyć:
   - $3^4 \cdot 9^8$
   - $\frac{(4^2)^8}{8^{10}}$
   - $\frac{(3^{15}+3^{13})\cdot 2^9}{(3^{14}+3^{12})\cdot 1024}$
   - $\frac{1^{-1}+2^{-2}}{(\frac{2}{3})^{-2}+(-4)^{-1}\cdot 5+(0,5)^2}$
   - $64^{\frac{1}{3}},\ 27^{-\frac{5}{3}},\ 9^{-1,5}$
   - $(\frac{25}{49})^{-\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{7})^{-1}$
   - $(9^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} - (25^{\frac{5}{2}})^{-\frac{1}{10}} + [(\frac{3}{4})^{-1} \cdot (\frac{2}{9})^{\frac{6}{7}}]^0 : 36^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$
   - $[9^{-\frac{1}{4}} + (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}] \cdot [9^{-\frac{1}{4}} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}]$
   - $[(4+7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (4-7^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^2$
   - $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}},\ 12^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$
2. Wykonać poniższe działania:
   - $\frac{(x^3)^2 \cdot (x^5)^3}{(x^2)^4}$
   - $(\frac{5x^3}{6y^2})^3,\ \frac{27a^5}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^4}$
   - $(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4})^{-2} \cdot (\frac{a^4b^{-2}}{c^{-2}d^{-3}})^{-3}$
   - $(x^2-y^2)(x^{-2}+y^{-2}),\ (x^{-2}+y^{-3})(x^{-2}-y^{-3})$
   - $(\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{8}y^{\frac{1}{2}})^2.$

3. Rozwiązać poniższe równania i nierówności:
    - $x - 5x^{\frac{1}{2}} + 4 = 0$
    - $x - 7x^{\frac{1}{2}} + 6 = 0$
    - $x - 3(x-1)^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$
    - $x + (x+3)^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$
    - $(x-2)^{\frac{1}{2}} + 4(x-2)^{\frac{1}{4}} - 5 = 0$
    - $x^2 > x^{-1}, \quad x^{-3} \leqslant x^{-2}, \quad x^{\frac{1}{4}} < x^{\frac{1}{2}}.$

# Funkcja wykładnicza

## Definicja

*Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję* $f(x) = a^x$, *gdzie* $x \in R$, *zaś* $a > 0$ *jest ustaloną liczbą.*

1. W wyniku jakich przekształceń wykresu funkcji $g(x) = 2^x$, otrzymamy wykres funkcji $f(x)$? Podać dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$.
   a) $f(x) = 2^x + 2$, b) $f(x) = -2^x$, c) $f(x) = 2^{-x}$, d) $f(x) = |2^x - 2|$,
   e) $f(x) = 2^{|x|}$.
2. Wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ przekształcić przez symetrię względem :
   - osi OX,
   - osi OY,
   - początku układu współrzędnych.

   Podać wzory otrzymanych funkcji.
3. Niech prawdziwe będą następujące równości :
   a) $10^x = 7$, b) $\left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{3}{4}$, c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,5$, d) $\left(\frac{7}{4}\right)^x = 0,6$, e) $(0,2)^x = \frac{1}{4}$,
   f) $\left(2\frac{1}{3}\right)^x = 0,2$, g) $10^x = 0,15$, h) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{4}$.
   W każdym przypadku znaleźć wartość *sgnx*.

5. Rozwiązać równania :
a) $3^{5x-8}=9^{x-3}$, b) $7^{x-4}=(\sqrt{7})^{2-3x}$, c) $5^{x^2+2}=5^{3x}$, d) $25^{x^2}=125^{4x-6}$,
e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{9}{16}$, f) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-2}$, g) $0,125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$,
h) $0,5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\frac{1}{64}$, i) $6^{x-5}\cdot 36^{x+3}=36$, j) $2^{x-4}\cdot 8^{3-2x}=4^{3x-3}$,
k) $(0,25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$, l) $8^{3x-5}=0,125\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}$, m) $\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^{x}=8\cdot 4^{3-2x}$.

6. Rozwiązać równania :
a) $3^{x+2}-3^{x}=72$, b) $2^{x+3}-2^{x}=112$, c) $2^{x}-2^{x-4}=15$,
d) $7\cdot 5^{x}-5^{x+2}+450=0$, e) $2\cdot 16^{x}-2^{4x}-4^{2x-2}=15$, f) $7^{5x}-7^{5x-1}=6$,
g) $3^{5x-4}+3^{5x}=82$, h) $4^{x+1}+4^{x}=320$, i) $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=450$.

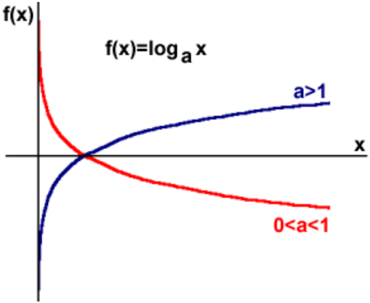
7. Rozwiązać równania :

a) $2\cdot 16^{x}-17\cdot 4^{x}+8=0$,
b) $3^{x+1}+9^{x}=108$,
c) $7^{2x}+7^{x}=36\cdot 7^{x}+686$,
d) $2^{x+1}+4^{x}=80$,
e) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$,
f) $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8=0$,
g) $49^{x}-6\cdot 7^{x}+5=0$,
h) $5^{x}+5^{3-x}=30$,
i) $\dfrac{10^{x}+10^{-x}}{10^{x}-10^{-x}}=5$,
j) $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$,
k) $2^{x}+12\cdot 2^{-x}=9\frac{1}{2}$.

8. Rozwiązać równania :
a) $11^{x-7} = 17^{7-x}$, b) $8^{x-3} = 9^{x-3}$, c) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$.
9. Rozwiązać równania :
a) $64^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{x} = 576$, b) $\left(\frac{16}{9}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}$,
c) $4^{x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$, d) $3^{x} - 18 \cdot 3^{-x} = 7$,
e) $3 \cdot 4^{x} - 5 \cdot 6^{x} + 2 \cdot 9^{x} = 0$, f) $3^{x} + 4^{x} = 25$,
g) $4^{x+1} - 6^{x} = 2 \cdot 9^{x+1}$, h) $2 \cdot 14^{x} + 3 \cdot 49^{x} = 2^{2x}$.
10. Wyznaczyć te wartości parametru $k$, dla których funkcja $f(x) = 2^{x^2+kx+k}$ nie przyjmuje wartości mniejszych od 1.
11. Zbadać liczbę rozwiązań równania $3^{-x^2+ax+\frac{1}{2}a} = (\sqrt{27})^{a+2}$ w zależności od wartości parametru $a$.
12. Rozwiązać równanie

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot \sqrt{2}^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$$

# Funkcja logarytmiczna




$\mathbf{f(x) = \log_a x}$ $\mathbf{a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0}$

Oto lista wybranych wzorów dotyczących logarytmów:

- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a b, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c \neq 1$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad b \neq 1$
- $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b, \quad ab \neq 1,\ c \neq 1$

1. Obliczyć:
   a) $\log_2 8$; b) $\log_6 \sqrt{6}$; c) $\log_3 1$;
   d) $\log_5 0,2$; e) $\log 2 + \log 50$; f) $\log_3 18 - \log_3 2$;
   g) $\log_{\frac{2}{3}} 2,25$ h) $\log_5 5\sqrt{5}$ i) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}} 8$;
   j) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$; k) $49^{\log_7 2}$; l) $16^{\log_2 3}$;
   m) $2^{\log_2 5}$; n) $27^{\log_3 2}$; o) $\frac{\log_6 125}{\log_6 5}$;
   p) $\frac{\log_4 5}{\log_2 5}$; q) $(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}+\log_4 81}$; r)$\log_2(\log_3 \sqrt{5}) - \log_2(\log_3 5)$.
2. Znaleźć liczbę $x$, jeżeli:
   a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$; b) $\log_{0,1} x = -1$; c) $\log_x \frac{1}{81} = 4$;
   d) $\log_2 x = 5$; e) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; f) $\log_x 4 = -2$;
   g) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; h) $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$; i) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$;
   j) $\log_3 x = -3$; k) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; l) $\log_x 64 = 3$;
   m) $\log_x 8 = \frac{1}{2}$; n) $\log_x 0,125 = -2$; o) $\log_x 625 = \frac{3}{4}$.
3. Obliczyć:
   a) $2^{\log_2 32}$; b) $3^{\log_3 5}$;
   c) $4^{\log_4 3}$; d) $10^{2+2\log 7}$;
   e) $49^{\log_7 2}$; f) $16^{\log_2 3}$;
   g) $2^{3-\log_2 3}$; h) $8^{1-\log_2 3}$.

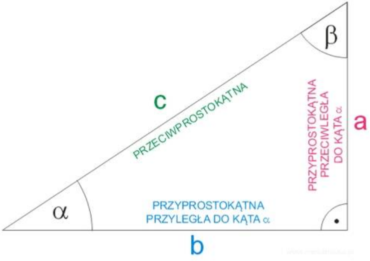
4. Wyznaczyć dziedziny funkcji:
   a) $f(x) = \log_x(3 - x)$;
   b) $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$;
   c) $f(x) = \log(x^2 + 3x + 4)$;
   d) $f(x) = \log \frac{x+3}{2-x}$;
   e) $f(x) = \log_2 \frac{x^2-9}{|x|-3}$;
   f) $f(x) = \log_4 |x|$;
   g) $f(x) = \sqrt{\log_2(2x-1) - \log_2(5-3x)}$.
5. Korzystając z definicji logarytmu rozwiązać równania:
   a) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$;
   b) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$;
   c) $\log_7[\log_4(\log_3^2(x-7))] = 0$;
   d) $\log_{x-2} 9 = 2$;
   e) $\log_{x-2}(x^3 - 14) = 3$;
   f) $\log_{3-x} 2(x^2 + 2x - 1) = 2$.
6. Rozwiązać równania:
   a) $\log(3x+4) + \log(x+8) = 2$;
   b) $\log(3x-91) - \log(30-x) = 1$;
   c) $3^{\log x} = \frac{1}{27}$.
7. Rozwiązać równania:
   a) $\frac{2\log x}{\log(5x-4)} = 1$;
   b) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$;
   c) $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$;
   d) $\log_2 |x^3 + 2x^2 - 4x - 4| = 2$;
   e) $2\log x + \log(6 - x^2) = 0$;
   f) $\log|2x-3| - \log|3x-2| = 1$;
   g) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$;
   h) $\log(x-5) - \log 2 = \frac{1}{2}\log(3x-20)$.

8. Rozwiązać równania:
   a) $\frac{1}{5-4\log x}+\frac{4}{1+\log x}=3$; b) $\log_3^2 x-\log_3 x^3+2=0$;
   c) $x^{\log x}=100x$; d) $4-\log x=3\sqrt{\log x}$;
   e) $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$; f) $x^{\log x}+10x^{-\log x}=11$;
   g) $\log(2^x-4^x)-\log(-8)=\log\left(2^{x-1}-\frac{1}{4}\right)$; h) $\log_2 x+\log_x 2=\frac{10}{3}$
9. Rozwiązać nierówności:
   a) $\log_2(x+1)>3$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)<-4$; c) $\log_3(x^2+2)>3$;
   d) $\log_{\frac{1}{4}}|x-3|<-2$; e) $\log_x 4<2$; f) $\log_x \frac{2x-1}{x-1}>1$.
10. Rozwiązać nierówności:
    a) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)]>0$; b) $\log_x(x^2-3)-\log_x(x-1)>1$;
    c) $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2-9\log_{\frac{1}{2}} x+4>0$; d) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}>3$;
    e) $\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-\log x}>1$; f) $|3\log x-1|<2$;
    g) $\log_{2x-3} x>1$; h) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3)<2$.

# Trygonometria

**Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym**

- sinusem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej ($\sin\alpha$)
- cosinusem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej ($\cos\alpha$)
- tangensem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej ($\mathrm{tg}\,\alpha$)
- cotangensem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości drugiej przyprostokątnej ($\mathrm{ctg}\,\alpha$).

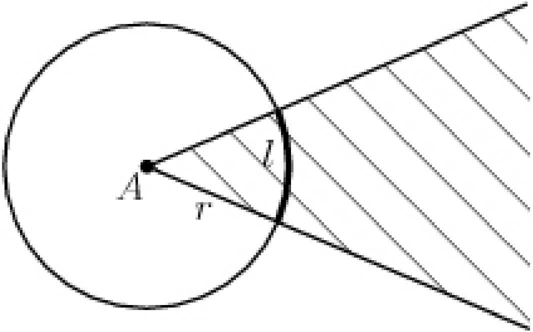



przykładowo :

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$

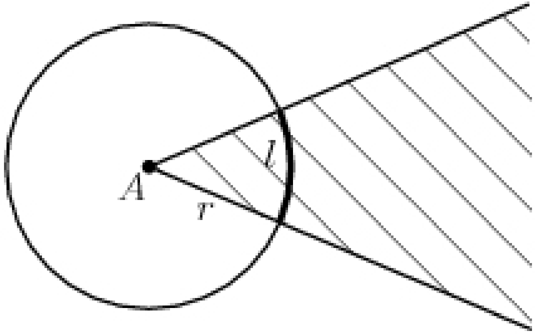
**Definicja**

*Miara łukowa kąta to stosunek długości łuku okręgu opartego na tym kącie do długości promienia tego okręgu.*



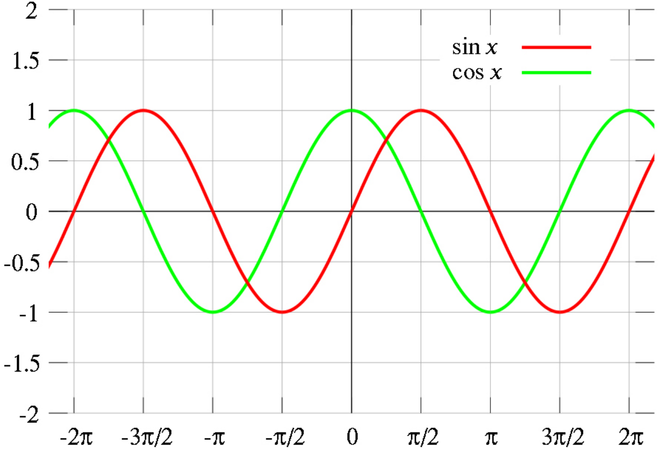
## Definicja

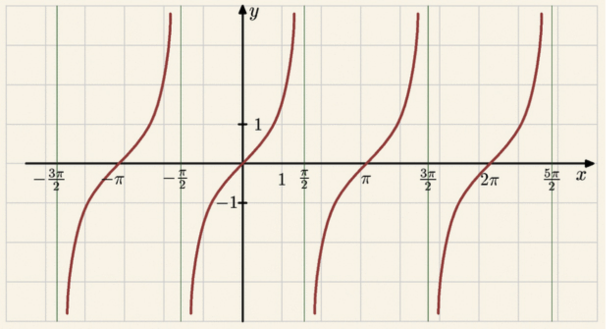
*Miara łukowa kąta to stosunek długości łuku okręgu opartego na tym kącie do długości promienia tego okręgu.*



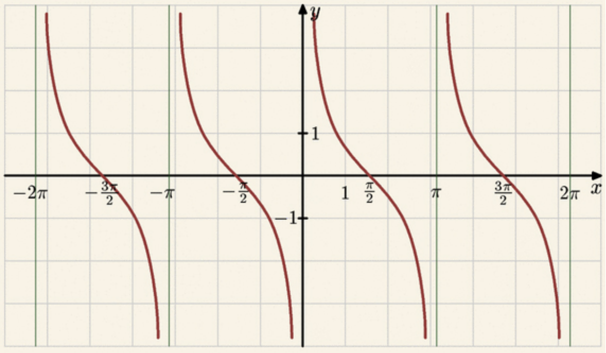

Kąt, którego miara łukowa wynosi 1 nazywamy *radianem* i oznaczamy skrótowo *rad*. Często pomija się wyrażenie "*rad*", podając jedynie wartość liczbową miary łukowej, np. mówimy, że miara łukowa kąta półpełnego wynosi $\pi$.

# Wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta






$y = \operatorname{tg} x$




$y = \operatorname{ctg} x$

**(Nie)parzystość funkcji, okresowość funkcji trygonometrycznych:**

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$

**(Nie)parzystość funkcji, okresowość funkcji trygonometrycznych:**

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$.

**Podstawowe wzory trygonometryczne:**

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

**(Nie)parzystość funkcji, okresowość funkcji trygonometrycznych:**

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha$.

**Podstawowe wzory trygonometryczne:**

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Zadanie 1. Korzystając z powyższych wzorów wyprowadzić zależność: $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Następnie, korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymać analogiczny wzór dla $\sin 2\alpha$.

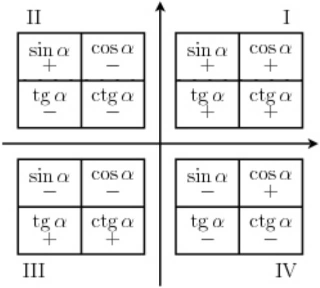
**Wartości funkcji tryg. dla $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ :**

| $\alpha$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Wartości funkcji tryg. dla $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ :**

| $\alpha$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

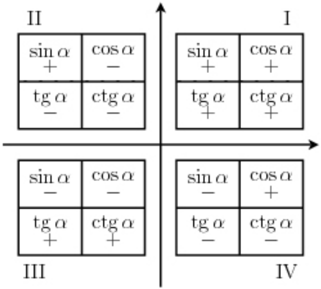
**Znaki funkcji trygonometrycznych:**



## Wartości funkcji tryg. dla $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ :

| $\alpha$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Znaki funkcji trygonometrycznych:




## Wzory redukcyjne :

Niech $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wtedy :

- $\sin(\frac{\pi}{2} \mp \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} \mp \alpha) = \pm\sin\alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} \mp \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} \mp \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$
- $\sin(\pi \mp \alpha) = \pm\sin\alpha$
- $\cos(\pi \mp \alpha) = -\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(\pi \mp \alpha) = \mp\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\pi \mp \alpha) = \mp\operatorname{ctg}\alpha$
- $\sin(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha) = -\cos\alpha$
- $\cos(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha) = \mp\sin\alpha$
- $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$
- $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} \mp \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha.$

Zadanie 2. Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6,\ \alpha \in I$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{7},\ \alpha \in IV$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 2,\ \alpha \in III$.

**Zadanie 2.** Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6,\ \alpha \in I,$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{7},\ \alpha \in IV,$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 2,\ \alpha \in III.$

**Zadanie 3.** Obliczyć
a) $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$, b) $\sin 2x$ wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in II$.

**Zadanie 2.** Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6$, $\alpha \in I$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\alpha \in IV$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha \in III$.

**Zadanie 3.** Obliczyć
a) $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$, b) $\sin 2x$ wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in II$.

**Zadanie 4.** Zbadać, czy istnieje kąt $\alpha$ spełniający równanie
a) $2\sin^2\alpha - 1 = 1$, b) $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 5$, c) $\operatorname{tg}\alpha + 1 = 10^3$, d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$,
e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Zadanie 2. Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6,\ \ \alpha \in I,$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{7},\ \ \alpha \in IV,$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 2,\ \ \alpha \in III.$

Zadanie 3. Obliczyć
a) $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$, b) $\sin 2x$ wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in II.$

Zadanie 4. Zbadać, czy istnieje kąt $\alpha$ spełniający równanie
a) $2\sin^2\alpha - 1 = 1,$ b) $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 5,$ c) $\operatorname{tg}\alpha + 1 = 10^3$, d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0,$
e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}.$

Zadanie 5. Sprawdzić, czy podane równości są tożsamościami
a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2,$ b) $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x = 1,$
c) $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x - 1} = \operatorname{tg}^2 x,$ d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$, e) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x},$
f) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2,$ g) $\frac{1}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{2\cos x}{\cos 2x},$
h) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{\sin 2x}.$

**Zadanie 2.** Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6,\ \alpha \in I$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{7},\ \alpha \in IV$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 2,\ \alpha \in III$.

**Zadanie 3.** Obliczyć
a) $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$, b) $\sin 2x$ wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in II$.

**Zadanie 4.** Zbadać, czy istnieje kąt $\alpha$ spełniający równanie
a) $2\sin^2\alpha - 1 = 1$, b) $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 5$, c) $\operatorname{tg}\alpha + 1 = 10^3$, d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$,
e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

**Zadanie 5.** Sprawdzić, czy podane równości są tożsamościami
a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, b) $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x = 1$,
c) $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x - 1} = \operatorname{tg}^2 x$, d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$, e) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$,
f) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$, g) $\frac{1}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{2\cos x}{\cos 2x}$,
h) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{\sin 2x}$.

**Zadanie 6.** Obliczyć:
$\cos 720^\circ$, $\sin 150^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 330^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\sin(-120^\circ)$, $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$,

Zadanie 2. Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha$ wiedząc, że
a) $\sin\alpha = 0,6$, $\alpha \in I$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, $\alpha \in IV$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha \in III$.

Zadanie 3. Obliczyć
a) $\cos 2x$ wiedząc, że $\cos x = \frac{1}{4}$, b) $\sin 2x$ wiedząc, że $\sin x = \frac{24}{25}$ i $x \in II$.

Zadanie 4. Zbadać, czy istnieje kąt $\alpha$ spełniający równanie
a) $2\sin^2\alpha - 1 = 1$, b) $\sin\alpha + 3\cos\alpha = 5$, c) $\operatorname{tg}\alpha + 1 = 10^3$, d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$,
e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Zadanie 5. Sprawdzić, czy podane równości są tożsamościami
a) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, b) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cdot\cos^2 x = 1$,
c) $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x - 1} = \operatorname{tg}^2 x$, d) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$, e) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$,
f) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$, g) $\frac{1}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{2\cos x}{\cos 2x}$,
h) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Zadanie 6. Obliczyć:
$\cos 720^\circ$, $\sin 150^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 330^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\sin(-120^\circ)$, $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$,

Zadanie 7. Policzyć $\sin 22,5^\circ$.

**Lista wybranych, użytecznych wzorów, z których będziecie często korzystać:**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$
- $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$
- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

**Lista wybranych, użytecznych wzorów, z których będziecie często korzystać:**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$
- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$
- $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

Zadanie 8. Obliczyć: $\sin 15^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$.

**Lista wybranych, użytecznych wzorów, z których będziecie często korzystać:**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$
- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$
- $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$
- $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

Zadanie 8. Obliczyć: $\sin 15^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$.

Zadanie 9. Wykazać, że $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}$.

## Równania i nierówności trygonometryczne

Zadanie 9. Rozwiązać równania

a) $\cos x = -1$, b) $\operatorname{tg} x = 1$, c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sin 5x = 1$,
e) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, f) $\operatorname{ctg} 3x = 1$, g) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$.

## Równania i nierówności trygonometryczne

Zadanie 9. Rozwiązać równania

a) $\cos x = -1$, b) $\operatorname{tg} x = 1$, c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sin 5x = 1$,
e) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, f) $\operatorname{ctg} 3x = 1$, g) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$.

Zadanie 10. Rozwiązać równania

a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, b) $\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$, c) $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$,
d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$, e) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$, f) $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x = 2$,
g) $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$,
h) $\sin x + \cos x = 1$, i) $4\sin^3 x - 4\sin^2 x + 3\sin x = 3$.

## Równania i nierówności trygonometryczne

**Zadanie 9.** Rozwiązać równania

a) $\cos x = -1$, b) $\operatorname{tg} x = 1$, c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sin 5x = 1$,
e) $\operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, f) $\operatorname{ctg} 3x = 1$, g) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$.

**Zadanie 10.** Rozwiązać równania

a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, b) $\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$, c) $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$,
d) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$, e) $\cos 2x + \sin^2 x = 0$, f) $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x = 2$,
g) $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 1 - \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$,
h) $\sin x + \cos x = 1$, i) $4\sin^3 x - 4\sin^2 x + 3\sin x = 3$.

**Zadanie 11.** Rozwiązać poniższe równania :

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4\sin 2x$, b) $(\cos x - \sin x)^2 + \operatorname{tg} x = 2\sin^2 x$,
c) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$, d) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$,
e) $\frac{4\cos x - \sin 2x}{\cos x} = 4\cos^2 x$, f) $\frac{1-\cos 8x}{1+\operatorname{tg} x} = 0$.

## Zadania różne (ciekawe!)

Zadanie 12. Wykazać, że równanie

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin 100x = 100$$

nie ma rozwiązań.

Zadanie 13. Dla jakich wartości parametru $\alpha$ suma kwadratów różnych pierwiastków równania

$$x^2 - 2x \sin \alpha - \cos^2 \alpha = 0$$

jest równa 3?

Zadanie 14. Dla jakich wartości parametru $k$ równanie

$$\sin 3x = \frac{k^2 - 3k + 2}{k^2 - 2}$$

ma rozwiązanie?

Zadanie 15. Rozwiązać równanie

$$\cos(x-1) = x^2 - 2x + 2.$$