

1. Obliczyć sumy szeregów.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{6^n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

2. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium porównawczego.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}, x \in R$

3. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium D'Alemberta.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

4. Zbadać zbieżność szeregów korzystając z Kryterium Cauchy'ego.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+3}{n})^{n^2}$

5. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{1}{n})$

6. Zbadać zbieżność szeregów

- |                                                                 |                                                          |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$                    | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$                     | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$          |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2} 2^n$             | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 1$          |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$                    | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$            |
| (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$                     | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$  |
| (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}{6^n}$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$        |
| (m) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{n}{2}}$     | (n) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n^2}{e^{\sqrt{n^2+n}}})$ |
| (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$                     |                                                          |

## KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW LICZBOWYCH.

**Kryterium Cauchy'ego.** Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- (i) Jeżeli  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , to szereg ten jest zbieżny.
- (ii) Jeżeli  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , to szereg ten jest rozbieżny.

**Kryterium D'Alemberta.** Rozważmy szereg o wyrazach dodatnich  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

- (i) Jeżeli  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , to szereg ten jest zbieżny.
- (ii) Jeżeli  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , to szereg ten jest rozbieżny.

**Kryterium porównawcze 1.** Rozważmy szeregi o wyrazach dodatnich  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Jeżeli dla prawie wszystkich liczb  $n \in N$  spełniona jest nierówność  $a_n \leq b_n$  oraz

- (i) szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
- (ii) szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest rozbieżny.

**Definicja.** Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest *ograniczony* jeżeli ciąg sum częściowych  $\{S_n\}$  jest ograniczony, tzn.  
 $\exists_{M>0} \forall_{n \in N} |S_n| \leq M$ .

**Kryterium Dirichleta.** Jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest ograniczony, a ciąg  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest taki, że  $\forall_n \lambda_n \geq \lambda_{n+1} \geq 0$  i  $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , to  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n a_n$  jest zbieżny.

**Przykłady ciągów zbieżnych.**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$